© J.-B.A.K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>

Feuille de TD n° 3 Contrôle de pas dans les schémas à un pas

Dans cette fiche on considère les schémas à un pas pour la résolution numérique de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Où $f \in C^r([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, *(l'entier* r*, ainsi que les réels* t_0 *et* T *seront précisés dans chaque exercice). On se donne alors un entier* N *fixé, et on pose* $h = T/N$ *et* $t_n = t_0 + nh$ $(0 \leq n \leq N)$*. On désigne par* x_n *une valeur approchée de* $x(t_n)$ *pour tout* $n \in \{0, \ldots N\}$*. Dans toute la suite on admettra les régularités nécessaires sur* f *pour que les calculs aient un sens.*

Exercice- 1 *Notions d'erreurs*

On considère l'équation différentielle (1), ainsi que le schéma numérique à un pas (2), supposé convergent d'ordre p, pour sa résolution numérique

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n = 0, 1, \ldots N - 1 \\ x_0 = x^0. \end{cases} \tag{2}$$

Définition (erreur locale) : On appelle erreur locale du schéma (2) à l'instant t au point y, la quantité

$$\xi(t, y, h) = x(t + h) - (y + h\Phi(t, y, h)) \tag{3}$$

où x est solution de $\quad x'(s) = f(s, x(s)) \quad s \in]t, t + h[, \qquad x(t) = y.$

Cette écriture de l'erreur locale introduit une fonction que l'on appelle fonction principale d'erreur :

Définition (fonction principale) : On appelle fonction principale erreur du schéma (2), la fonction $\tau(\cdot, \cdot)$ telle que :

$$\xi(t, y, h) = \tau(t, y)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}). \tag{4}$$

Q-1 : Quelle relation y'a-t-il entre l'erreur de consistance à l'instant t et la fonction principale d'erreur.

Q-2 : **Exemples de fonctions principales d'erreurs.**

On considère le schéma de Runge-Kutta à deux étages

$$(S) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(\alpha_1 p_{n,1} + \alpha_2 p_{n,2}) \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n) \\ p_{n,2} = f(t_n + \mu h, x_n + h\mu p_{n,1}) \end{cases} \tag{5}$$

Q-2-1 : Montrer que

$$\begin{aligned} \xi(t, y, h) = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)f(t, y)h + h^2\left(\frac{1}{2} - \alpha_2\mu\right)(f_t + f_y f)(t, y) \\ + \frac{1}{2}h^3\left[\left(\frac{1}{3} - \alpha_2\mu^2\right)(f_{tt} + 2f_{ty}f + ff_{yy}f) + \frac{1}{3}f_y(f_t + f_y f)\right](t, y) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \tag{6}$$

où, $f_s = \frac{\partial f}{\partial s}, \quad f_{sz} = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z}, \qquad s, z \in \{t, y\}.$

Q-2-2 **:** En déduire que la condition pour que le schéma (5) soit au minimum d'ordre 2 conduit à une famille de schémas à un paramètre $\alpha_2 \neq 0$, dont la fonction principale d'erreur est donnée par

$$\tau(t,y) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\alpha_2}\right)(f_{tt} + 2f_{ty}f + ff_{yy}f) + \frac{1}{3}f_y(f_t + f_yf)\right](t,y), \tag{7}$$

Q-2-3 **:** Quelle valeur de α_2 conduit au schéma du point milieu (ou d'Euler modifié) ? En déduire la fonction principale d'erreur associée au schéma d'Euler modifié.

Q-2-4 **:** Quelle valeur de α_2 conduit au schéma de Heun ? En déduire la fonction principale d'erreur associée au schéma de Heun.

Q-2-5 **:** Proposer un meilleur choix de α_2 et en déduire le schéma résultant, ainsi que la fonction principale d'erreur associée.

Exercice- 2 *Estimation asymptotique de l'erreur globale*

On considère l'équation

$$\left\{\begin{array}{lcl} e'(t) & = & \frac{\partial f}{\partial y}(t,x(t))e(t) + \tau(t,x(t)) \quad t \in]t_0, t_0+T[, \\ e(t_0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

Dans laquelle x(t) est solution de l'équation (1).

Soit $\{\overline{e}_n\}$ la suite générée par une perturbation de sa discrétisation par le schéma d'Euler explicite :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{e}_{n+1} & = & \overline{e}_n + h\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n,x(t_n))\overline{e}_n + \tau(t_n,x(t_n))\right) + \mathcal{O}(h^2) \quad n = 0,\dots N-1, \\ \overline{e}_0 & = & 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

Q-1 **:** Montrer que

$$\forall n \in \{0,\dots,N\}, \qquad \overline{e}_n = e(t_n) + \mathcal{O}(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0. \tag{10}$$

Q-2 **:** Soit x solution de (1) et $\{x_n\}$ la suite générée par le schéma (2) supposé convergent d'ordre $p \geq 1$.

Montrer que pour tout $n = 0,\dots,N-1$, on a

$$\phi(t_n,x(t_n),h) - \phi(t_n,x_n,h) = \frac{\partial f}{\partial y}(t_n,x(t_n))\,(x(t_n) - x_n) + \mathcal{O}(h^{p+1}). \tag{11}$$

Q-3 **:** On définit, pour tout $n = 0,\dots,N-1$, l'erreur globale à l'instant t_n par $e_n = x(t_n) - x_n$. Montrer que

$$e_{n+1} = e_n + h\left[\phi(t_n,x(t_n),h) - \phi(t_n,x_n,h)\right] + \tau(t_n,x(t_n))h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}). \tag{12}$$

Q-4 **:** Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \{0,\dots,N\}, \qquad x(t_n) - x_n = e(t_n)h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0. \tag{13}$$

Exercice- 3 *Approximation de l'erreur globale*

On suppose que l'on dispose d'un approximation d'ordre 1 de la fonction principale d'erreur : c'est-à-dire $\exists \tau_a(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^1([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R} \times [0,T]; \mathbb{R})$ telle que

$$\tau_a(t,y,h) = \tau(t,y) + \mathcal{O}(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0. \tag{14}$$

Q-1 : Montrer que $\tau_a(t_n, x_n, h) = \tau(t_n, x(t_n)) + \mathcal{O}(h)$.

Q-2 : On définit alors la suite $\{\overline{v}_n\}$ à partir de la suite $\{x_n\}$ comme suit (*dans la pratique x_n et $\overline{v}_n$ sont générés simultanément*) :

$$\begin{cases} \overline{v}_{n+1} &= \overline{v}_n + h\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, x_n)\overline{v}_n + \tau_a(t_n, x_n, h)\right) \quad n = 0, \dots N-1, \\ \overline{v}_0 &= 0. \end{cases} \tag{15}$$

Montrer que

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \qquad x(t_n) - x_n = \overline{v}_n h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0. \tag{16}$$

Q-3 : En déduire un algorithme permettant de contraindre l'erreur globale à être à chaque instant en dessous d'un seuil donné : c'est à dire pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$ on ait $|x(t_n) - x_n| \leq tol$ où tol est une quantité donnée.

Exercice- 4 *Approximation de la fonction principale d'erreur*

On considère $\phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ associée à un schéma à un pas convergent d'ordre $p \geq 1$, et de fonction principale d'erreur $\tau(\cdot,\cdot)$

Q-1 : Extrapolation de Richardson

On pose

$$\begin{cases} y_h = y + h\phi(t,y,h) \\ y_{\frac{h}{2}} = y + \frac{h}{2}\phi(t,y,\frac{h}{2}) \\ y_h^* = y_{\frac{h}{2}} + \frac{h}{2}\phi(t+\frac{h}{2}, y_{\frac{h}{2}}, \frac{h}{2}). \end{cases} \tag{17}$$

et on définit

$$\tau_a(t,y,h) = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^p} \frac{y_h^* - y_h}{h^{p+1}}$$

Montrer que $\tau_a(t,y,h) = \tau(t,y) + \mathcal{O}(h)$ lorsque $h \to 0$.

Q-2 : Méthodes emboîtées

Soit $\phi^*(\cdot,\cdot,\cdot)$ associée à un schéma d'ordre $p+1$ au moins.

on définit

$$\tau_a(t,y,h) = \frac{\phi^*(t,y,h) - \phi(t,y,h)}{h^p}$$

Q-2-1 : Montrer que $\tau_a(t,y,h) = \tau(t,y) + \mathcal{O}(h)$ lorsque $h \to 0$.

Q-2-2 : Donnez un exemple de pair (ϕ, ϕ^*) à votre connaissance.