Examen de première session

Mercredi 15 mai 2013 - Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Chacun des exercices porte sur la résolution numérique de l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

où $f \in \mathcal{C}_{lip} \cap C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, (les entiers p et d, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). On désignera par L la constante de Lipschitz de f en espace. Pour toute subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = (t_0+T)$ de $[t_0, t_0+T]$, on posera $h_n = t_{n+1}-t_n$ le pas à l'instant $t_n, n = 0, \ldots, N-1$ et on écrira simplement $h = \frac{T}{N}$ si la subdivision est uniforme (i.e $h_n = \frac{T}{N}$ pour tout $n \in \{0, \ldots N-1\}$) ; On désignera aussi par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \ldots N\}$.

Exercice- 1 *Questions de cours*

Dans cet exercice on suppose $T < \infty$, t_0 et d quelconques, et $p = 3$.

Q-1 : Connaissez-vous un schéma explicite ou implicite à 2 ou 3 pas ? Si oui, pouvez-vous décrire la démarche de sa construction ? (**Il n'est pas demandé de démontrer l'ordre 2 ou 3 de ce schéma**).

Q-2 : Le schéma choisi est-il stable ? est-il consistant ? Justifier.

Exercice- 2 *Analyse d'un schéma de Runge Kutta*

Dans cet exercice on suppose $T < \infty$, t_0 quelconque, $p = 3$, et $d = 1$.

Q-1 : Trouver les coefficients $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la formule

$$\int_0^1 P(s)\, ds = aP(0) + bP(\frac{2}{3}) \quad \text{soit exacte pour les polynômes de degré} \leq 1 \quad .$$

Cette formule reste-t-elle exacte pour les polynômes de degré 2 ?

Q-2 : En déduire que pour tout $\varphi \in C^3([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall h \in [0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h], \quad \left| \int_t^{t+h} \varphi(s)\, ds - h\left(a\varphi(t) + b\varphi(t + \frac{2h}{3})\right)\right| \leq Ch^4. \tag{2}$$

Q-3 : On se donne le schéma numérique suivant, défini par $x_0 = x^0$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1}{4}p_{n,1} + \frac{3}{8}p_{n,2} + \frac{3}{8}p_{n,3}\right), \quad n \in \{0, \ldots N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,2}). \end{cases} \tag{3}$$

Q-3-1 : Donner le tableau des coefficients de ce schéma de Runge-Kutta.
Quelle est la formule d'intégration principale associée ?

Q-3-2 : Étudier la stabilité de ce schéma. Puis donner un majorant de la constante de stabilité.

Q-3-3 : On pose pour tout $h \in [0, T], t \in [t_0, t_0 + T - h]$

$$\begin{aligned} g(t, y, h) &= f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f(t, y)\right) + f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}f(t, y))\right), \\ \xi_{23}(t, h) &= 2f\left(t + \frac{2}{3}h, x(t + \frac{2}{3}h)\right) - g(t, x(t), h). \end{aligned}$$

- Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0+T-h]$: $\xi_{23}(t,0) = 0, \quad \frac{\partial \xi_{23}}{\partial h}(t,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_{23}}{\partial h^2}(t,0) = 0.$
- En déduire qu'il existe une constante $C_{23} > 0$ indépendante de h telle que

$$|\xi_{23}(t,h)| \leq C_{23} h^3, \quad \forall h \in [0,T], \forall t \in [t_0, t_0+T-h]. \tag{4}$$

Q-3-4 : Montrer que le schéma (3) est consistant d'ordre exactement 3.

Q-3-5 : En déduire que le schéma (3) est convergent d'ordre 3 et préciser les constantes K_0 et K telles que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq K_0 |x^0 - x_0| + K h^3. \tag{5}$$

Q-4 : On souhaite appliquer le schéma (3) avec un pas $h = \frac{1}{50}$ dans l'approximation de la solution du problème

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), & t \in]0,1[, \\ x(0) = \theta(0), \end{cases} \tag{6}$$

où θ est une fonction suffisamment régulière, connue uniquement par ses valeurs en un certain nombre de points, définis expérimentalement et renseignés dans le tableau suivant :

s	-5e-2	-3e-2	-1e-2	1e-2	3e-2	5e-2
$\theta(s)$	-0.01	-0.1	0.1	-0.1	0.01	0.1

L'approximation de $\theta(0)$ est donc nécessaire. On suppose que l'on dispose d'une fonction `Matlab` qui à tout vecteur de points x et tout vecteur de valeurs y, retourne la valeur au point x_0 du polynôme d'interpolation de Lagrange construit à l'aide des vecteurs x et y, comme décrit dans le listing ci-dessous :

```
function [y0] = interpoleLagrange(x,y,x0)
 % ENTREES:
 %    x est un tableau des points
 %    y est le tableau des valeurs aux points x de la fonction à interpoler.
 %    x0 est le point ou l'on cherche la valeur y0, du polynome d'interpolation de Lagrange.
 % SORTIES:
 %   y0 = P(x0), où P est le polynome satisfaisant P(x(i)) = y(i),i=1..,length(x)
```

Le coût en temps de calcul de cette fonction étant proportionnel à la taille des vecteurs x, y, préciser les points du tableau des valeurs de θ à fournir à cette fonction pour une approximation à moindre coût de $\theta(0)$ dotée d'une précision suffisante pour l'utilisation du schéma (3).

Exercice- 3 *Paramètre de tolérance locale dans l'adaptation de pas.*

Dans cet exercice on suppose $T < \infty$, $p = 1$, d et t_0 quelconques.

Rappels et problématique

Soit un schéma numérique à un pas (7), supposé convergent d'ordre q, introduit pour la résolution du problème (1) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), & n = 0, 1, \dots N-1, \\ x_0 = x^0. \end{cases} \tag{7}$$

Définition (erreur locale) : *On appelle erreur locale du schéma (7) à l'instant t au point y, la quantité*

$$\xi(t,y,h) = x(t+h) - (y + h\Phi(t,y,h)) \tag{8}$$

où x est solution de $x'(s) = f(s, x(s)) \quad s \in]t, t+h[, \qquad x(t) = y$.

Définition (fonction principale) : *On appelle fonction principale d'erreur du schéma (7), la fonction $\tau(\cdot,\cdot)$ telle que :*

$$\xi(t,y,h) = \tau(t,y) h^{q+1} + \mathcal{O}(h^{q+2}). \tag{9}$$

Définition (erreur globale) : *On appelle erreur globale ou simplement erreur à l'instant t_n, du schéma (7) la quantité*

$$e_n = x(t_n) - x_n. \tag{10}$$

*Effectuer l'***adaptation de pas** *dans le schéma (7) consiste à le remplacer par le schéma (11) :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0, & h_0 & \textit{donnés}, \\ x_{n+1} & = & x_n + h_n\Phi(t_n, x_n, h_n), \\ t_{n+1} & = & t_n + h_n, \end{array}\right\} \quad \textit{tant que} \quad t_{n+1} \leq t_0 + T \tag{11}$$

et à produire les pas h_n de sorte qu' à chaque instant t_n on ait

$$\|x(t_n) - x_n\| \leq \varepsilon, \tag{12}$$

où ε est une tolérance à l'erreur globale.

Dans la pratique à l'instant t_n, le pas h_n est d'abord estimé, puis corrigé. L'estimation repose sur un contrôle de l'erreur locale. En effet, pour ε donné on cherche un réel $\varepsilon_T > 0$ tel que la relation $\|\tau(t_n, x_n)\|h_n^q \leq \varepsilon_T$ $\forall n$ assurera la relation (12) .

Le paramètre ε_T désigne alors la tolérance à l'erreur locale, et exprime le contrôle à apporter à l'erreur locale pour garantir un certain contrôle de l'erreur globale. Il doit donc dépendre de ε et est d'ailleurs le paramètre réclamé par la plupart des codes de résolution d'EDO par un schéma à pas adaptatifs.

Le but du présent exercice est d'estimer un majorant de ε_T. Sans nuire à la généralité nous allons considérer le schéma d'Euler explicite.

Partie I : Préliminaires

Soit a, b deux réels ($a < b$), $\phi, \psi \in C([a, b]; \mathbb{R}^+)$, $K \in \mathbb{R}^+$ tels que,

$$\phi(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)\phi(s)\, ds \quad \forall a \leq t \leq b.$$

Q-1 : On pose $g(t) = \frac{K + \int_a^t \psi(s)\phi(s)\, ds}{K \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right)}$, $\quad \forall a \leq t \leq b, \quad$ (où $\exp(s) = e^s \quad \forall s \in \mathbb{R}$).

Q-1-1 : Montrer que g est une fonction décroissante sur $[a, b]$.

Q-1-2 : Calculer $g(a)$ et déduire que

$$\phi(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right) \quad \forall a \leq t \leq b.$$

Q-2 : Pour $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ donnés, on désigne par $y(t)$, respectivement $\tilde{y}(t)$ les solutions de (1) avec pour donnée initiale respective $y(t_0) = x_0$ et $\tilde{y}(t_0) = \tilde{x}_0$.

Q-2-1 : Montrer que

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \|\tilde{x}_0 - x_0\| + L \int_{t_0}^t \|\tilde{y}(s) - y(s)\|\, ds \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Q-2-2 : En déduire que

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \|\tilde{x}_0 - x_0\| e^{L(t - t_0)}, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Q-3 : Soit a, b deux réels ($a < b$)et g une fonction continue et décroissante sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b - a)g(b) \leq \int_a^b g(s)\, ds. \tag{13}$$

Partie II :

On considère le schéma d'Euler explicite suivant à pas variables

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + h_n f(t_n, x_n), \quad n \in \{0, \dots N-1\}, \\ x_0 = x^0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Q-4 : Donner l'expression ξ_n de l'erreur locale à l'instant t_n, au point x_n de ce schéma.

Q-5 : Montrer que la fonction principale d'erreur associée au schéma (14) est donnée par :

$$\tau(t,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(t,y).$$

Q-6 : Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on définit la suite des fonctions ψ_n par :

$$(\psi)\left\{\begin{array}{l} \psi_n'(t) = f(t, \psi_n(t)), \quad t \in]t_n, t_0 + T[, \\ \psi_n(t_n) = x_n. \end{array}\right. \tag{15}$$

Q-6-1 : Comparer $\psi_0(t_N)$ et $x(t_N)$.

Q-6-2 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\psi_{n+1}(t_N) - \psi_n(t_N)\Big) = x_N - x(t_N).$

Q-6-3 : Montrer que $\psi_n(t_{n+1}) = x_{n+1} + \xi_n.$

Q-6-4 : A l'aide de la question **Q-2** de la Partie I, montrer que $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, on a

$$\|\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)\| \leq h_n e^{L(t-t_{n+1})}\left\|\frac{\xi_n}{h_n}\right\| \quad \forall t_{n+1} \leq t \leq t_N.$$

Q-6-5 : En déduire que $\displaystyle\|x(t_N) - x_N\| \leq \sum_{n=0}^{N-1}\left(h_n e^{L(t_N - t_{n+1})}\left\|\frac{\xi_n}{h_n}\right\|\right)$.

Q-6-6 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\Big(h_n e^{L(t_N-t_{n+1})}\Big) \leq \int_{t_0}^{t_N} e^{L(t_N - s)}\,ds.$

Q-7 : On suppose que $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, on a $\|\frac{\xi_n}{h_n}\| \leq \varepsilon_T$.

Q-7-1 : Montrer que

$$\|x(t_N) - x_N\| \leq \frac{\varepsilon_T}{L}\Big(e^{LT} - 1\Big).$$

Q-7-2 : En déduire une tolérance ε_T à l'erreur locale qui assure une tolérance ε à l'erreur globale.

Q-8 : En négligeant le second terme du second membre de (9), exprimer la relation $\|\frac{\xi_n}{h_n}\| \leq \varepsilon_T$, pour le schéma d'Euler explicite en fonction de f et de ses premières dérivées partielles.