Licence L3 | Mathématiques et Applications (MAP)
Université Paris–Sud | M325 Calcul Scientifique II
Centre d'orsay | Année 2012 – 2013

Examen de seconde session
Mardi 18 juin 2013 - Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Chacun des exercices porte sur la résolution numérique de l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

où $f \in \mathcal{C}_{lip} \cap C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$*, (les entiers* p *et* d*, ainsi que les réels* t_0 *et* T *seront précisés dans chaque exercice). On désignera par* L *la constante de Lipschitz de* f *en espace. Pour toute subdivision* $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = (t_0+T)$ *de* $[t_0, t_0+T]$*, on posera* $h_n = t_{n+1} - t_n$ *le pas à l'instant* t_n*,* $n = 0, \ldots, N-1$ *et on écrira simplement* h *(avec* $h = \frac{T}{N}$ *si* $T < \infty$*) si la subdivision est uniforme (i.e* $h_n = h$ *pour tout* $n \in \{0, \ldots N-1\}$*) ; On désignera aussi par* x_n *une valeur approchée de* $x(t_n)$ *pour tout* $n \in \{0, \ldots N\}$*.*

Exercice- 1 *Questions de cours : Monotonie de schémas*

Dans cet exercice on suppose $x^0 > 0$, $t_0 = 0$, $T = \infty$ et $f(t, y) = -ry$ avec $r > 0$.

Q-1 : Montrer que la solution de l'équation est $x(t) = x^0 e^{-rt}, \quad \forall t > 0$. En déduire que cette solution est décroissante et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Q-2 : On cherche dans cet exercice des schémas qui satisfont à cette propriété. C'est-à-dire

$$x_{n+1} \le x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

De tels schémas seront dits **monotones**. Si un schéma n'est monotone que pour certaines valeurs de h, on dit qu'il est **conditionnellement monotone**. La plus grande valeur de h pour laquelle le schéma est monotone est appelée **rayon du domaine de monotonie**.

On propose les schémas suivants, initialisés par $x_0 = x^0$:
a) $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$,
b) $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$,
c) $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right)$.

Q-2-1 : Quel nom donne-t-on à chacun d'eux ? Expliquer brièvement leur construction.

Q-2-2 : Donner le rayon du domaine de monotonie de chacun de ces schémas.

Q-2-3 : Conseiller sur le choix de l'un de ces schémas pour le problème considéré.

Exercice- 2 *Schéma de Runge-Kutta*

Dans cet exercice on suppose $t_0 = 0$, $T < \infty$, $d = 1$, p quelconque.

On considère alors un schéma à un pas convergent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \ldots N\} \\ x_0 = x^0 \end{cases} \tag{2}$$

On supposera que $\exists \Lambda > 0$, indépendante de t et de h telle que $\forall y_2, y_1 \in \mathbb{R}$, on ait

$$|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| \leq \Lambda |y_2 - y_1|, \quad \forall (t, h) \in [0, T] \times [0, T].$$

On construit un schéma de Runge-Kutta (RK) à l'aide de ce schéma (2) de la manière suivante :

$$(RK) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\Big(p_{n,1} + 4p_{n,2} + p_{n,3}\Big), \quad n \in \{0, \dots N\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}\Phi(t_n, x_n, \frac{h}{2})\right), \\ p_{n,3} = f(t_n + h, x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)). \\ x_0 = x^0. \end{cases} \tag{3}$$

Q-1 : Montrer que ce schéma est stable.

Q-2 : Si ce schéma était consistant, quel serait son ordre maximum de consistance. Justifier.

Q-3 : Montrer que ce schéma est convergent d'ordre 4 dès que Φ définit un schéma d'ordre au moins 3.

Q-4 : Donner un point négatif de chacun des choix suivants :

Q-4-1 : Φ définit un schéma convergent d'ordre exactement $q = 2$.

Q-4-2 : Φ définit un schéma convergent d'ordre exactement $q = 4$.

Exercice- 3 *Construction et étude d'un schéma à deux pas.*

Dans cet exercice on suppose $T < \infty$, $t_0 = 0$, $p = 2$, et $d = 1$.

On considère le schéma numérique suivant :

$$(P_2) \begin{cases} x_{n+1} = x_{n-1} + 2hf(t_n, x_n), \quad n \in \{1, \dots N-1\} \\ \\ x_0, x_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés,} \end{cases}$$

Partie I : Construction

Q-1 : En intégrant chaque membre de l'équation différentielle (1) entre les instants t_{n-1} et t_{n+1}, expliquer une démarche potentielle de construction du schéma (P_2).

Partie II : Etude par application du cours

Q-2 : Donner l'expression des polynômes caractéristiques (ϱ, σ) identifiant le schéma (P_2).

Q-3 : **Stabilité :** Déterminer les racines complexes du premier polynôme caractéristique ϱ. En déduire la stabilité du schéma (P_2).

Q-4 : **Consistance :**

Q-4-1 : Par le biais des polynômes caractéristiques ϱ et σ, justifier que le schéma (P_2) est consistant.

Q-4-2 : Déterminer le premier terme non nul du développement en série de la fonction $\varrho(e^h) - h\sigma(e^h)$ au voisinage de $h = 0$. En déduire l'ordre de consistance du schéma (P_2), et que la constante d'erreur (globale) du schéma (P_2) est $C = \frac{1}{6}$.

Partie III : Etude par retour à la définition

Q-5 : **Consistance**

Pour tout $0 < h < T, h \leq t \leq T - h$ on pose

$$\varepsilon(t, h) = x(t + h) - x(t - h) - 2hf(t, x(t)).$$

Montrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$ (indépendante de h) telle que

$$|\varepsilon(t, h)| \ \leq \ K_1 \, h^3 \text{ pour tous } h \in [0, T], t \in [h, T - h].$$

Q-6 : **Stabilité**

On considère le schéma $(\tilde{P}_2)$, perturbation du schéma (P_2) par la donnée de la suite $(\eta_n)_{0 \leq n \leq N-1} \in \mathbb{R}^N$ et des conditions initiales $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \mathbb{R}$:

$$(\tilde{P}_2) \begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n-1} + 2hf(t_n, \tilde{x}_n) + \eta_n \quad n \in \{1, \ldots, N-1\}, \\ \\ \tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \mathbb{R} \text{ donnés.} \end{cases}$$

Q-6-1 : Pour tout $1 \leq n \leq N$, on pose $u_n = \max\{|\tilde{x}_n - x_n|, |\tilde{x}_{n-1} - x_{n-1}|\}$. Montrer que

$$u_{n+1} \leq (1 + 2hL)u_n + |\eta_n| \quad n \in \{1, \ldots, N - 1\}.$$

Q-6-2 : En déduire qu'il existe une constante $S > 0$ indépendante de h telle que

$$|\tilde{x}_n - x_n| \leq S \left(\max\{|\tilde{x_0} - x_0|, |\tilde{x_1} - x_1|\} + \sum_{j=1}^{N-1} |\eta_j| \right), \forall\, 1 \leq n \leq N.$$

Et conclure que le schéma à 2 pas (P_2) est stable.

Q-7 : **Estimation d'erreur**

Q-7-1 : Justifier qu'il existe une constante $K_2 > 0$ indépendante de h telle que

$$|x(t_n) - x_n| \leq S \left(\max\{|x(0) - x_0|, |x(t_1) - x_1|\} + K_2 h^2 \right), \forall\, 0 \leq n \leq N.$$

Q-7-2 : Comment choisir x_0 et x_1 pour que le schéma (P_2) soit convergent ?

Q-7-3 : On choisit $x_0 = x^0$ et on calcule x_1 à partir de x_0 en faisant un pas d'une méthode à un pas décrite par une fonction Φ : $x_1 = x_0 + h\Phi(0, x_0, h)$. Quelle méthode choisiriez-vous ? Justifiez votre choix et donnez la majoration résultante de $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n|$.