Examen de seconde session
Jeudi 19 juin 2014 - Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Chacun des exercices porte sur la résolution numérique de l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$(ED) \qquad x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

où $f \in C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, (les entiers p et d, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). On désignera par L la constante de Lipschitz de f en espace. On considère une subdivision uniforme $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = (t_0 + T)$ de $[t_0, t_0 + T]$, de pas $h = T/N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et d'instants $t_n = t_0 + nh$ ($0 \leq n \leq N$). On cherche une valeur approchée x_n de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \ldots N\}$.

Exercice- 1 *Questions de cours : Schéma réversible*

On considère ici $t_0 = 0, T = 1$, $d = 2$, $x^0 = (0, 1)$ et $f(t, x) = (v, -y)$ où on a posé $x = (y, v)$.
$x(t) = (y(t), v(t))$ désigne la solution exacte de (1). On désigne alors par $x_n = (y_n, v_n)$ une valeur approchée de $(y(t_n), v(t_n))$ pour $n = 0, \ldots N$.

Un schéma numérique pour la résolution de ce problème est dit réversible en temps si une étape à partir de (y_n, v_n) nous amène à (y_{n+1}, v_{n+1}) et une seconde étape à partir de $(y_{n+1}, -v_{n+1})$ nous ramène à $(y_n, -v_n)$. Autrement dit, on peut retourner à sa position de départ en inversant tout simplement sa vitesse.

On rappelle qu'un schéma explicite à un pas pour la résolution du problème (1) est donné sous sa forme générale par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \ldots, N\}, \\ x_0 = x^0, \end{cases}$$

où Φ est une fonction de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d \times [0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Q-1 : Précisez la fonction Φ pour un schéma explicite de votre choix, en expliquant la démarche pour son obtention.

Q-2 : Vérifiez si le schéma proposé est réversible.
Attention : *c'est tout à fait normal s'il ne l'est pas, inutile donc de le modifier.*

Q-3 : Programmez votre schéma à travers une fonction `Matlab` dont vous commenterez les arguments d'entrée et de sortie.

Exercice- 2 *Analyse d'un schéma de Runge Kutta*

Dans cet exercice on suppose t_0 quelconque, $T < \infty$ et $p = 3$ et $d = 1$.

Q-1 : On considère la formule d'intégration approchée suivante

$$\int_0^1 P(s)\, ds = \frac{1}{8}\Big(P(0) + 3P(\frac{1}{3}) + 3P(\frac{2}{3}) + P(1)\Big)$$

Q-1-1 : Montrer qu'elle est exacte pour les polynômes de degré 3.

Q-1-2 : En déduire l'existence d'une constante $C \geq 0$ telle que si $\varphi \in C^4([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$ alors

$$\forall h \in [0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h], \qquad \left| \int_t^{t+h} \varphi(s)\, ds - \frac{h}{8}\Big[\varphi(t) + 3\varphi(t + \frac{h}{3}) + 3\varphi(t + \frac{2h}{3}) + \varphi(t + h)\Big] \right| \leq Ch^5.$$

Q-2 : On se donne le schéma numérique suivant initialisé par $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$(S_1)\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{8}\left(p_{n,1} + 3p_{n,2} + 3p_{n,3} + p_{n,4}\right), \quad n \in \{0, \dots N\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{3}, x_n + \frac{h}{3}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n - \frac{h}{3}p_{n,1} + hp_{n,2}), \\ p_{n,4} = f(t_n + h, x_n + h\left(p_{n,1} - p_{n,2} + p_{n,3}\right). \end{cases}$$

Q-2-1 : Donner le tableau des coefficients de ce schéma de Runge-Kutta.
Quelle est la formule d'intégration principale associée ?
Q-2-2 : Montrer que ce schéma est consistant d'ordre exactement 3.
Q-2-3 : Étudier la stabilité de ce schéma. Et préciser une constante de stabilité S du schéma.
Q-2-4 : Montrer l'existence des constantes positives K_0, K, indépendantes de h, telles que

$$\max_{0 \le n \le N} |x(t_n) - x_n| \le K_0 |x(t_0) - x_0| + Kh^3. \tag{2}$$

Q-2-5 : Comment choisir x_0 pour garantir la convergence d'ordre 3 du schéma au niveau numérique.

Exercice- 3 *Construction et analyse directe du schéma à 2 pas*

Dans cet exercice, on suppose $t_0 = 0$, $T < \infty$, $p = 4$, $d = 1$. On désignera toujours par L la constante de Lipschitz de f en espace et on va s'intéresser au schéma numérique à deux pas suivant :

$$(S_2)\begin{cases} x_{n+1} = x_{n-1} + \dfrac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right), \quad n \in \{1, \dots N-1\} \\ x_0, x_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés,} \end{cases} \tag{3}$$

où $f_n = f(t_n, x_n)$ pour tout $n = 0, \dots, N$.

Partie I : Une démarche de construction

Q-1 : En intégrant chaque membre de l'équation différentielle (1) entre les instants t_{n-1} et t_{n+1}, montrer que

$$x(t_{n+1}) - x(t_{n-1}) = \int_{t_n - h}^{t_n + h} f(s, x(s))\, ds \quad \forall n = 1, \dots, N-1. \tag{4}$$

Q-2 : Trouver trois réels $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que la formule

$$\int_{-1}^{1} P(s)\, ds = \alpha P(-1) + \beta P(0) + \gamma P(1) \quad \text{soit exacte pour les polynômes de degré} \le 2 \quad .$$

Cette formule reste-t-elle exacte pour les polynômes de degré 3 ?

Q-3 : En déduire que pour tout $\varphi \in C^4([0,T];\mathbb{R})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall h \in [0,T], \forall t \in [h, T-h], \quad \left| \int_{t-h}^{t+h} \varphi(s)\, ds - h\Big(\alpha\varphi(t-h) + \beta\varphi(t) + \gamma\varphi(t+h)\Big) \right| \le Ch^5. \tag{5}$$

Q-4 : Décrire au regard de ce qui précède une démarche de construction du schéma (S_2).

Partie II : Une étude directe

Q-5 : Constructibilité :
Montrer qu'il existe $h_* > 0$ (que l'on précisera) tel que pour tout $0 < h < h_*$, le schéma (S_2) de pas h est constructible.
Dans toute la suite de l'exercice, on supposera fixé un réel $h_0 > 0$, tel que $0 < h \le h_0 < h_*$.

Q-6 : Consistance :
Pour tout $0 < h < h_*$ et $t \in [h, T-h]$, on pose

$$\varepsilon(t,h) = x(t+h) - x(t-h) - \frac{h}{3}\Big(f(t+h, x(t+h)) + 4f(t, x(t)) + f(t-h, x(t-h))\Big).$$

Q-6-1 : Montrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$ (indépendante de h) telle que

$$|\varepsilon(t,h)| \le K_1\, h^5. \tag{6}$$

Q-6-2 : En déduire que le schéma (S_2) est consistant et préciser son ordre de consistance.

Q-7 : Stabilité :
Soit $(\eta_n)_{1\le n\le N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$ donné, on considère le schéma perturbé :

$$(\tilde{S}_2)\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n-1} + \dfrac{h}{3}\Big(f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}) + 4f(t_n, \tilde{x}_n) + f(t_{n-1}, \tilde{x}_{n-1})\Big) + \eta_n,\ n \in \{1, \ldots, N-1\}, \\ \tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \mathbb{R} \text{ donnés.} \end{cases} \tag{7}$$

Q-7-1 : Montrer que pour tout $0 < h \le h_0$, le schéma $(\tilde{S}_2)$ de pas h est constructible.

Q-7-2 : Pour tout $1 \le n \le N$, on pose $u_n = \max\{|\tilde{x}_n - x_n|, |\tilde{x}_{n-1} - x_{n-1}|\}$. Montrer que

$$u_{n+1} \le \left(1 + h\frac{2L}{1 - \frac{Lh_0}{3}}\right) u_n + \frac{|\eta_n|}{1 - \frac{Lh_0}{3}} \quad n \in \{1, \ldots, N-1\}. \tag{8}$$

Q-7-3 : En déduire l'existence d'une constante $S > 0$ indépendante de h telle que $\forall 0 < h \le h_0$,

$$\max_{0\le n\le N} |\tilde{x}_n - x_n| \le S\left(\max\{|\tilde{x}_0 - x_0|, |\tilde{x}_1 - x_1|\} + \sum_{j=1}^{N-1} |\eta_j|\right). \tag{9}$$

Q-8 : Estimation d'erreur :

Q-8-1 : Déduire des questions précédentes qu'il existe une constante $K_2 > 0$ (indépendante de h) telle que pour tout $0 < h \le h_0$ on ait

$$\max_{0\le n\le N} |x(t_n) - x_n| \le S\Big(\max\{|x(0) - x_0|, |x(h) - x_1|\} + K_2\, h^4\Big). \tag{10}$$

Q-8-2 : Comment choisir x_0 et x_1 pour que le schéma (S_2) soit convergent ?

Q-9 : Initialisation :
On suppose que $x_0 = x^0$ et on calcule x_1 à partir de x_0 en faisant un pas d'un schéma explicite à un pas : $x_1 = x_0 + h\,\Phi(0, x_0, h)$.

Q-9-1 : Préciser au moins une méthode à un pas que l'on peut utiliser et pour laquelle il existe une constante $K_3 > 0$ telle que pour tout $0 < h \le h_0$, on ait

$$\max_{0\le n\le N} |x(t_n) - x_n| \le K_3\, h^4. \tag{11}$$

Q-9-2 : Préciser alors x_1 en fonction de x_0 et h.