Devoir : durée 1 h

Attention :

— *Vous devez créer un répertoire préfixé par votre nom et suffixé par M325, dans lequel se trouverons vos scripts.*
— *Aux termes de l'épreuve vous devez transmettre le répertoire zippé à l'adresse qui vous sera indiquée.*
— *Les réponses doivent figurer sous forme de commentaires dans vos scripts.*

Dans les exercices qui vont suivre, on considère les schémas numérique pour la résolution de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Où $f \in C^r([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$, (l'entier r, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés si nécessaire dans chaque exercice). On se donne alors un entier N fixé, et on pose $h = T/N$ et $t_n = t_0 + nh$ $(0 \leq n \leq N)$. On désigne par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \dots N\}$.

Exercice-1 : Analyse de précision du schéma

Dans cet exercice, on suppose le problème (1) résolu par trois schémas distincts (S1), (S2), et (S3) tous à un pas.

On ne dispose d'aucune information sur ces schémas, si ce n'est les courbes de convergence données ici par l'évolution, en fonction du pas de discrétisation (h), de l'erreur (E_h) à l'instant final entre la solution exacte et la solution approchée. Ces courbes sont fournies pour deux types d'échelles dans les Figure 1 et Figure 2. La Figure 2 contient en plus certaines droites dont les pentes sont indiquées dans la légende.

A la lueur de ces graphiques, et pour le problème considéré, classer ces trois suivant chacune des priorités suivantes :

1. Meilleur ordre de convergence (*on précisera l'ordre de convergence potentiel de chaque schéma*).
2. Meilleure qualité de l'erreur à pas h fixé.
3. Plus petite constante de consistance (sous l'hypothèse des constantes de stabilité identiques).

Conseiller alors un utilisateur sur le choix d'un de ces schémas.

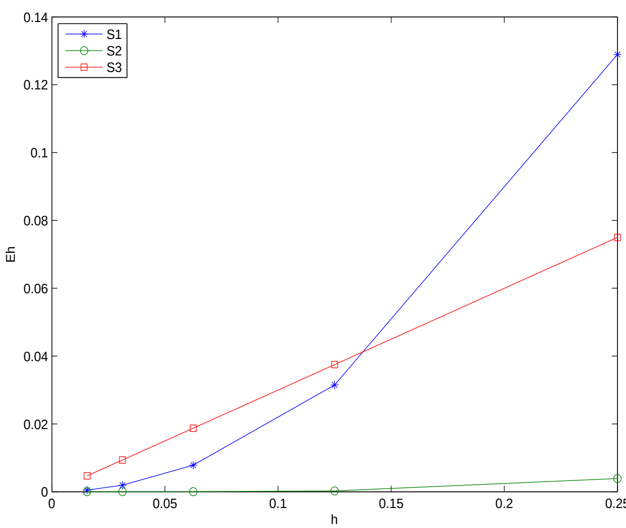

FIGURE 1 – Erreur E_h à l'échelle normale.

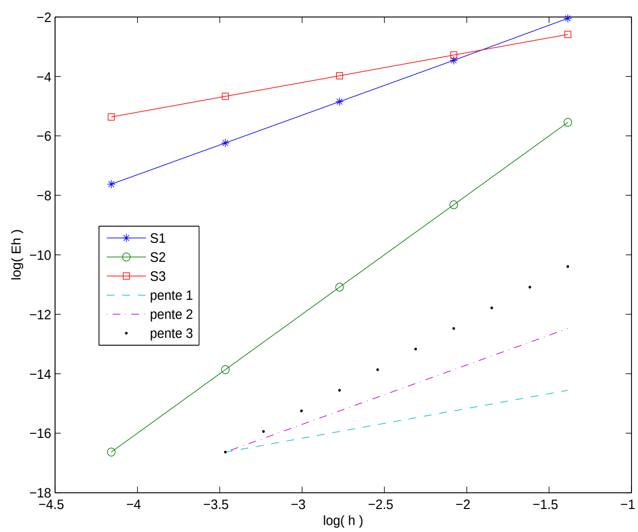

FIGURE 2 – Erreur E_h à l'échelle logarithmique.

Exercice-2 : Erreur locale

On considère ici le problème (1) avec les paramètres suivants :

$$f(t,y) = 4t\, y^{\frac{1}{2}}, \quad t_0 = 0, \quad T = 2, \qquad x(t_0) = 1. \tag{2}$$

Pour un pas h et une donnée initiale $x_0 = 1$, on s'intéresse à l'approximation x_1 de $x(h)$, produite par trois schémas $(S1)$,$(S2)$ et $(S3)$, donnée pas :

$$(S1)\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1, \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) \end{array}\right. \quad (S2)\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1, \\ x_1 = x_0 + hf\Big(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}f(t_0,x_0)\Big) \end{array}\right. \quad (S3)\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1, \\ x_1 = 1 - 0.3h + 2h^2 + h^4 \end{array}\right.$$

Q-2-1 : Donner en fonction de h, l'expression de x_1 fournie par les schémas $(S1)$ et $(S2)$.

Q-2-2 : Représenter sur le même graphique les courbes $log(h) \mapsto log(|E^i_{1h}|), i = 1,2,3$, où pour $i = 1,2,3$, E^i_{1h} désigne l'erreur générée pas le schéma (Si) sur le calcul de x_1. On admettra que la solution exacte du problème (1), pour les données (2) est $x(t) = (1+t^2)^2$.

Q-2-3 : Commenter les observations et dire si celles-ci étaient prévisibles ?

Exercice-3 : Applications

On considère encore l'équation différentielle (1) avec les expressions (2).

Pour sa discrétisation, on considère le schéma numérique suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_{n+2} = x_n + 2hf_{n+1}, \quad n = 0,\ldots,N-2, \\ x_0 = 1; \quad x_1 \quad \text{(à déterminer)}. \end{array}\right. \tag{3}$$

où on a posé $f_j = f(t_j, x_j)$, $\quad t_j = jh, \quad j = 0,\ldots,N, \quad$ avec $\quad h = \frac{T}{N}$.

Q-3-1 : Ecrire une fonction **`Matlab`**, **`monSchemaDeuxPas`** qui calcule la suite des solutions produites par le schéma.

```
function [t,x] = monSchemaDeuxPas(f, t0, tf, x0, x1, h)
% ENTREE :
% f  -> second-membre de l'edo ;
% t0 -> instant initial
% tf -> temps final;
% x0 -> donnée initiale;
% x1 -> approximation de x(t0+h);
% h-> pas;
% SORTIE :
% t-> liste des instants générés [t0,t1,...,tN]
% x-> liste des solutions générées aux instants t
```

Q-3-2 : Pour $h = 0.1$, représenter sur un même graphique les solutions obtenues pour les valeurs de x_1 obtenues par les schémas $(S1)$, $(S2)$ et $(S3)$.

Q-3-3 : En faisant varier le pas h comme $h = 2^{-i}$ avec $i = 2,3,4,5,6$, et pour chaque valeur de x_1 obtenue par les schéma (S_1), $(S2)$ et $(S3)$, on a calculé l'erreur entre la solution exacte et la solution fournie par le schéma (S) à l'instant final : $E_h = |x(t_N) - x_N|$. Les courbes d'évolution de E_h en fonction de h obtenues ont été représentées à l'échelle logarithmique sur une même figure. On a obtenu la Figure 3.

1. Commenter ce graphique (*donner les ordre de convergence*) et dire si ces résultats étaient prévisibles.
   On rappelle que pour le schéma (S) une estimation d'erreur est donnée par :

   $$\max_{0\le n\le N} |x(t_n) - x_n| \le K_1\Big(\max\{|x(t_0) - x_0|, |x(t_1) - x_1|\}\Big) + K_2h^2,$$

   où $K1$ et $K2$ sont des constantes positives indépendantes de h.
2. Fournir un script `Matlab` qui réalise cette expérience et comparer le graphique généré à celui de la Figure 3.

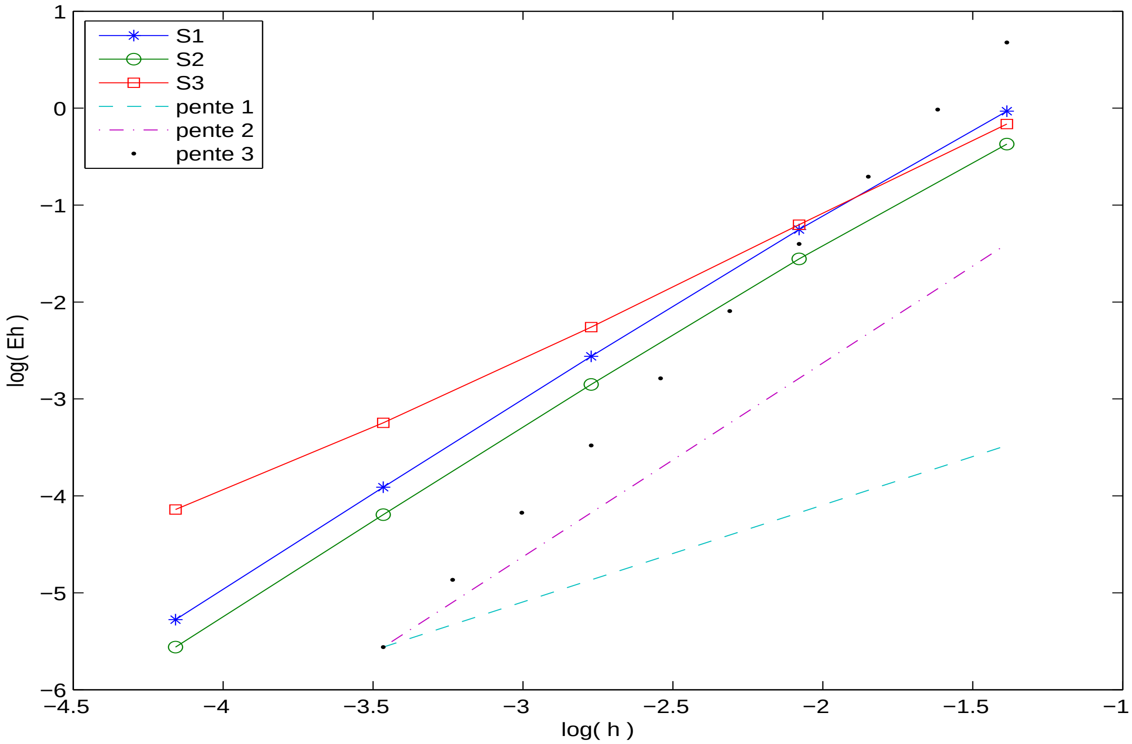

FIGURE 3 – Courbes à l'échelle logarithme, de l'évolution de l'erreur $E_h = |x(t_N) - x_N|$ entre la solution exacte et la solution produite par le schéma (S), pour différentes valeurs de x_1. Sur la légende, $Si, i = 1, 2, 3$ désigne la courbe associée à la valeur de x_1 issue du schéma (Si). On a aussi joint des droites de pentes respectives $1, 2$ et 3. Les courbes sont obtenues pour les données (2) avec $h = 2^{-k},\ k = 2, 3, 4, 5, 6$.