© *J.-B. A. K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>*

Devoir surveillé : 16 avril 2015
(Durée 2h00)

CONSIGNES :

— Les notes de cours et les scripts de TP sont autorisés. La consultation des pages Internet, en particulier de votre message électronique, est interdite. Le non respect de cette consigne entraînera l'annulation de votre note.
— Commencez par créer un répertoire **`M325_DS2_###`** où **`###`** est votre NOM. Travailler dans ce répertoire. Il devra contenir tous les fichiers dont vous aurez eu besoin.
— Lorsque la réponse à une question nécessite des commentaires rédigés, vous devez mettre ces commentaires dans vos fichiers en utilisant les commentaires du langage C. **Les réponses aux questions théoriques devront être faites sur papier.**
— A la fin de l'examen, vous devez envoyer, selon votre groupe de TP, votre répertoire **`M325_DS2_###`** zippé, par mail à l'une des adresses suivantes :
  — **`clementine.courtes@math.u-psud.fr`**
  — **`irene.kaltenmark@cmla.ens-cachan.fr`**
  En cas de doute ou difficulté dans la réalisation de cette procédure, n'hésitez pas à demander de l'aide à l'enseignant en salle. **Vous devez aussi remettre les réponses sur feuilles à l'enseignant en salle.**

Thème - 1 *Problème et solution analytique*

On considère l'équation de convection-diffusion suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\epsilon u'' + \beta\, u' &=& 0 & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) &=& 0, & \\ u(1) &=& 1, & \end{array}\right. \tag{1}$$

où ϵ et β des constantes positives.

Q-1 **:** **Existence et unicité de la solution**

Pour répondre à cette question, on va directement exhiber une solution analytique.

Q-1**-**1 **:** Montrer que la solution exacte du problème (1) est donnée par $u(x) = \dfrac{\exp(\frac{\beta}{\epsilon}x) - 1}{\exp(\frac{\beta}{\epsilon}) - 1}$.

Q-1**-**2 **:** En déduire que

$$0 \leq u(x) \leq 1, \quad \forall x \in [0,1] \tag{2}$$

Thème - 2 *Discrétisation par différences finies et existence et unicité de la solution approchée.*

Pour une discrétisation par différences finies, on commence par recouvrir $[0,1]$ d'une grille uniforme de pas $h = \frac{1}{N+1}$, pour un $1 \leq N \in \mathbb{N}$. Ceci génère les noeuds

$$\mathcal{X}_n = \{x_i, x_i = i \times h, i \in \{0,\ldots,N+1\}\}.$$

On écrit ensuite que l'équation est vérifiée en chaque noeud interne, ce qui conduit au problème discret (ne pas confondre avec le problème discret approché), soit

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\varepsilon u''(x_i) + \beta\, u'(x_i) & = & 0 & \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \\ u(x_0) & = & 0, & \\ u(x_{N+1}) & = & 0. & \end{array}\right. \tag{3}$$

On remplace ensuite les opérateurs différentiels par des différences divisées. Un traitement spéciale devant être accordé au terme de convection $\beta\, u'(x_i)$.

Q-1-3 **:** Montrer que u solution de (1) vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon \dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} + \beta\, u'(x_i) + \mathcal{O}(h^2) & = & 0, \quad \forall i = 1, \ldots, N \\ u(x_0) & = & 0, \\ u(x_{N+1}) & = & 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Q-2 **: Schéma centré et oscillations numériques potentielles.**

Ici, on approche $\beta\, u'(x_i)$ par un schéma centré : $\beta\, u'(x_i) = \beta\, \dfrac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$.

Q-2-1 **:** Montrer que le problème discret s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon \dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} + \beta\, \dfrac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2) & = & 0, \quad \forall i = 1, \ldots, N \\ u(x_0) & = & 0, \\ u(x_{N+1}) & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Pour tout $i = 0, \ldots, N+1$, on désigne par u_i la valeur approchée de $u(x_i)$ lorsqu'on se débarrasse des restes dans les formules (5). On obtient en fin le problème discret approché.

Q-2-2 **:** Montrer que le problème discret approché se met sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Chercher } U = (u_0, \ldots, u_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+2} \text{ tel que ,} \\ u_0 = 0, \\ -(P_e + 1)u_{i-1} + 2u_i - (1 - P_e)u_{i+1} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N, \\ u_{N+1} = 1. \end{array}\right. \tag{6}$$

où $P_e = \frac{\beta\, h}{2\epsilon}$ est une grandeur appelée nombre de **Péclet** local.

Q-2-3 **: Existence et unicité de la solution du problème discret approché**

Dans cette question vous pouvez admettre l'expression fournie et vérifier simplement qu'elle est solution du problème

On se propose de résoudre explicitement l'équation (6). On remarque que c'est une équation récurrente linéaire du second ordre, dont on peut chercher la solution sous la forme $u_i = \rho^i$.

1. Montrer alors que ρ vérifie l'équation *caractéristique* $(P_e - 1)\rho^2 + 2\rho - (P_e + 1) = 0$.
2. Trouver les racines ρ_1 et ρ_2 de cette équation et conclure qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $u_i = C_1\rho_1^i + C_2\rho_2^i, \forall 0 \leq i \leq N$.
3. Déterminer les constantes C_1, C_2, en utilisant la condition aux limites $u_0 = 0$, $u_{N+1} = 1$, et conclure que la solution de (6) est $u_i = \dfrac{1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^i}{1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^{N+1}}, \quad i = 0, \ldots, N+1.$

Q-2-4 **:** Montrer que pour $P_e > 1$, certains composantes u_i de la solution de l'équation (6) son négatives. Conclure que la solution fournie par le schémas centré présente des oscillations numériques.

Q-2-5 **:** Montrer qu'il n'y a pas d'oscillation numérique si $P_e < 1$. Quelle est alors la relation entre h, β et ϵ ?

Q-3 **: Un schéma corrigeant les oscillations.**

On propose cette fois d'approcher $\beta\, u'(x_i)$ par un schéma décentré (amont par rapport à l'écoulement) : $\beta\, u'(x_i) = \beta\, \dfrac{u(x_j) - u(x_{j-1})}{h} + \mathcal{O}(h)$.

Q-3-1 : Montrer que le problème discret approché se met sous la forme

$$\begin{cases} \text{Chercher } U = (u_0, \dots, u_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+2} \text{ tel que },\\ u_0 = 0,\\ -(1+2P_e)u_{i-1} + 2(1+P_e)u_i - u_{i+1} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N,\\ u_{N+1} = 1. \end{cases} \tag{7}$$

où $P_e = \frac{\beta\, h}{2\epsilon}$ est encore le nombre de Péclet.

Q-3-2 : En procédant comme à la question précédente, montrer que la solution du problème (7) est donnée par : $u_i = \dfrac{1-(1+2P_e)^i}{1-(1+2P_e)^{N+1}}, \quad i = 0, \dots, N+1.$

Q-3-3 : En déduire que la solution discrète vérifie $0 \le u_i \le 1, \quad \forall i = 0, \dots, N+1$. Comparer avec la propriété (2). *On dit alors que le schéma satisfait le principe du maximum (Car* $\min\limits_{x\in[0,1]} u(x) = 0 \le u_i \le 1 = \max\limits_{x\in[0,1]} u(x)$*).*

Thème - 3 *Méthodes itératives d'inversion du système linéaire issu de la discrétisation.*

Pour des besoins théoriques, on a pour habitude d'éliminer les conditions de Dirichlet afin d'obtenir un système linéaire dont la taille est égale au nombre de noeuds internes. Ceci peut rendre la mise en oeuvre ardue dans les dimensions supérieures ou les géométries complexes. On peut, comme nous allons le voir, se passer de cette élimination. On dit dans ce cas que les conditions aux limites essentielles sont introduites sous forme faible. Les problèmes non linéaires sont des sentiers d'application de cette procédure.
Ainsi, au lieu de mettre les problèmes (6) et (7) sous la forme d'un système linéaire $AU = b$ de taille N, on va les écrire sous la forme d'un système linéaire $AU = b$ de taille $N+2$, ce qui reviendra à garder intacts les différents membres des équations des problèmes (6) et (7). On parlera dans la suite de système étendu pour faire référence au système obtenu.

Q-4 : Justification du recours au système étendu (i.e aux conditions aux limites sous forme faible)

1. Sans construire explicitement la matrice A des systèmes linéaires (6) et (7) écrits sous la forme réduite habituelle $AU = b$ avec $U = [u_1, \dots u_N]^T$, montrer que celle-ci n'est symétrique lorsque $\beta \neq 0$.
2. Justifier alors qu'on gagnerait à construire directement la matrice des systèmes linéaires (6) et (7) écrits sous la forme étendue $\overline{A}\,\overline{U} = \overline{b}$ avec $\overline{U} = [u_0, \dots u_{N+1}]^T$. (*On dit dans ce cas que les conditions aux limites essentielles sont introduites sous forme faible.*)
3. Donner l'expression de la matrice $\overline{A}$, et du vecteur $\overline{b}$ dans ce cas. Et en déduire que les membres de gauche des équations (6) et (7) définissent directement le produit matrice vecteur par A dans le système étendu.

Dans la suite on ne considérera, pour les problèmes (6) et (7), que les systèmes étendus, qu'on écrira encore, sans ambiguïté comme $AU = b$.

Q-4-1 : Fournir une fonction **`gsl_matrix * centre_matrice(int N, double epsi, double beta)`** qui crée la matrice carrée $(N+2) \times (N+2)$ associée au système (6).

Q-4-2 : Fournir une fonction **`gsl_matrix * decentre_matrice(int N, double epsi, double beta)`** qui crée la matrice carrée $(N+2) \times (N+2)$ associée au système (7).

Q-5 : Validations 1/3

On considère les données suivantes : $\beta = 1, \ \epsilon = 0.01, \ N = 10$. On prendra, sauf mention explicite, dans les méthodes itératives ci-dessous les paramètres : $tol = 10^{-9}, iterMax = 1000$.

En utilisant vos scripts et fonctions du Tp3.

Q-5-1 : Fournir une fonction **`void test_centre_gradC()`**, qui utilise la méthode du gradient conjugué pour déterminer la solution du (6). Que constatez-vous ? justifiez.

Q-5-2 : Reprendre la question précédente avec une fonction **`void test_decentre_gradC()`** et le schémas (7). Les observations étaient-elles prévisibles ?

Q-5-3 **:** Fournir une fonction **`void test_centre_gradV()`** qui utilise la méthode du gradient à pas variable pour déterminer la solution approchée dans le cadre du schémas centré (6). Que constatez-vous ? justifiez .

Q-5-4 **:** Reprendre la question précédente avec une fonction **`void test_decentre_gradV()`** et le schémas (7). Les observations étaient-elles prévisibles ?

Q-6 : Validations 2/3

Les paramètres ϵ, β , N, tol et iterMax, sont les mêmes que ci-dessus.

Ici on considère l'équation normale $A^T\ A\ U = A^T\ b$.

On devra calculer explicitement la matrice $A^T\ A$ et le vecteur $A^T\ b$ avant d'appliquer les méthodes du gradient.

Q-6-1 **:** Fournir une fonction **`void test_eqnormale_decentre_gradC()`** qui applique la méthode du gradient conjugué sur l'équation normale pour déterminer la solution approchée de (7. Que constatez-vous ? justifiez .

Q-6-2 **:** Fournir une fonction **`void test_eqnormale_decentre_gradV()`** qui applique la méthode du gradient a pas variable sur l'équation normale pour déterminer la solution approchée de (7. Que constatez-vous ? justifiez.

Q-7 : Validations 3/3

Ici on retourne à l'équation de départ $AU = b$ (C'est-à-dire qu'on ne considère plus l'équation normale).

Q-7-1 **:** En faisant usage de votre fonction **`GradientPasVariable`** du TP3, fournir une fonction

```
int
GradientMR (const MatriceCSR * A, gsl_vector * x,  const gsl_vector * b,
                                   double tol, int iterMax, gsl_vector * Resi)
```

qui implémente l'algorithme du **résidu minimum** (en anglais *Minimal Residual* (MR)), donné en cours. Les paramètres sont les mêmes que ceux du gradient à pas variable.

Q-7-2 **:** Pour $\epsilon = 0.01$, et $\beta\ = 1$, $N = 10$, $tol = 10^{-9}$, $iterMax = 1000$, fournir une fonction **`void test_decentre_gradMR()`** qui utilise la méthode du résidu minimum pour déterminer la solution approchée de (7). Que constatez-vous ? justifiez.

Q-7-3 **:** Fournir de même une fonction **`void test_centre_gradMR()`** qui utilise la méthode du résidu minimum pour déterminer la solution approchée de (6). Et pour $\epsilon = 0.01$, $\beta\ = 1$, $tol = 10^{-9}$, $iterMax = 1000$, évaluer cette fonction dans les cas $N = 10$, comme ci-dessus, et $N = 100$. Que constatez-vous ? Un préconditionnement est-il nécessaire ?

Q-7-4 **:** Quelles autre méthode aurait-on pu employer à la place du résidu minimum ? Un gain pour cette méthode, comparée à la méthode du résidu minimum est-il possible ?