© J.-B. A. K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>

Devoir surveillé : 21 avril 2016 (Durée 2h00)

IMPORTANT- Consignes

— Les notes de cours et les scripts de TP sont autorisés. La consultation des pages Internet, en particulier de votre message électronique, est interdite. Le non respect de cette consigne entraînera l'annulation de votre note.

— Commencez par créer un répertoire **M325_DS2_###** où **###** est votre NOM. Travailler dans ce répertoire. Il devra contenir tous les fichiers dont vous aurez eu besoin.

— Lorsque la réponse à une question nécessite des commentaires rédigés, vous devez mettre ces commentaires dans vos fichiers en utilisant les commentaires du langage C.

— A la fin de l'examen, vous devez envoyer votre répertoire **M325_DS2_###** zippé, par mail à l' adresse suivante : **jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr**

Thème - 1 *Matrices Bandes et renumérotation*

On souhaite ici observer l'influence de la renumérotation. Pour cet exercice on fera usage des fichiers **rcm.h, rcm.c**.

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante : $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega =]a,b[\times]c,d[. \\ u(x,y) = g(x,y), \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où, f et g sont des fonctions données continues, et sa discrétisation par un schéma à 5 points sur une grille de $\bar{\Omega}$ de pas h dans chaque direction et de sommets $(x_i, y_j), 0 \le i \le n_x + 1, 0 \le j \le n_y + 1$ avec $x_0 = a, x_{n_x+1} = b, y_0 = c, y_{n_y+1} = d$

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j}}{h^2} = f(x_i, y_j), \quad 1 \le i \le n_x \quad 1 \le j \le n_y \\ u_{i,j} = g(x_i, y_j) \quad i,j \text{ tels que } (x_i, y_j) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

On construit le système linéaire associé $AU = F$ (voir TP1) avec une numérotation quelconque (pas forcément lexicographique) des noeuds internes du maillage. Ceci conduit à une perte de la structure bande de la matrice du Laplacien 2D. D'où la nécessité de recourir à l'algorithme de Cuthill-Mackey.

On fournit pour cet exercice la fonction suivante :

Listing 1 – Table de numerotation des noeuds internes

```c
int **
creer_table_numerotation (int nx, int ny)
{
  int i, j;
  int **C2I = (int **) malloc (nx * sizeof (int *));
  for (i = 0; i < nx; ++i)
    C2I[i] = (int *) calloc (ny, sizeof (int));
  int num = 0;
  for (j = 0; j < ny; j++)
    for (i = 0; i < nx; i++)
      {
        if ((i == 0) || (i == (nx - 1)) || (j == 0) || (j == (ny - 1)))
            C2I[i][j] = -1;
        else
            C2I[i][j] = num++;
      }
   /***************  DEBUT  RAJOUT *****************/
   int niveau_melange = 5
   for(int s = 2; s < niveau_melange; s++)
   {
    int k = (ny-1)/s;
    int l = (nx -1)/s;
```

```c
    for (j = 1; j < k; j+=s)
     for (i = 1; i < l; i+=s)
      {
        int temp = C2I[i][j];
        C2I[i][j] = C2I[i+l][j+k];
        C2I[i+l][j+k] = temp;
      }
     }
   /*************** FIN AJOUT *********************/

  return C2I;
}
```

Q-1 : En remplaçant dans votre fichier **`Laplacien2D.c`** la fonction **`static int **creer_table_numerotation (int nx, int ny)`** par celle fournie ci-dessus. Mettre en évidence cette perte de structure bande.

Q-2 : Utiliser la renumérotation de Cuthill-Mackey pour réduire la largeur de bande de la matrice A ainsi obtenue et la convertir en une matrice bande.

Q-3 : En utilisant votre structure de matrice bande, résoudre le système linéaire $Au = b$. Et représenter la solution dans un fichier dans un format lisible par `Gnuplot` . On prendra pour paramètres (ceux du fichier **`test_Laplacien2D.c`**).

Thème - 2 *Matrices Bandes et application : matrices tridiagonales*

Il est question dans cet exercice de manipuler la structure matrice bande construit en TP.

Exercice-1 : On considère la matrice tridiagonale

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

On posera $a = [a_0, \dots, a_{n-1}]^T, \quad b = [b_0, \dots, b_{n-1}]^T, \quad c = [c_0, \dots, c_{n-1}]^T$. [$(\cdot)^T$ est l'opérateur transposé].

On est dans le cas de matrice bande. Fournir alors une fonction
`MatriceBande*`
`creerMatriceBande(const gsl_vector* c, const gsl_vector* a, const gsl_vector* b)`

qui construit la matrice B à l'aide des vecteurs a, b, c effectue sa décomposition LU de cette matrice bande et la retourne.

Exercice-2 :

On considère la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

avec $c_0 \neq 0$ et $b_{n-1} \neq 0$.

Q-1 : Expression de A^{-1}

On se donne deux réels α et γ. On définit

$$u = [\frac{1}{\alpha}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\gamma}]^T \quad \text{et} \quad v = [v_0, 0, \dots, 0, v_{n-1}]^T$$

Q-1-1 : Montrer qu'on peut choisir v_0, v_{n-1} tels que

$$A = B + uv^T, \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & \tilde{a}_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

avec B inversible. *On exprimera* $\tilde{a}_0, \tilde{a}_{n-1}, v_0, v_{n-1}$ *en fonction de* $a_0, a_{n-1}, c_0, b_{n-1}, \alpha, \gamma$,

Dans toute la suite, on supposera construits u et v.
(*On pourra supposer l'existence d'une fonction qui construit les vecteurs* u *et* v.)

Q-1-2 : Montrer que $A^{-1} = \left(I - B^{-1}u(1 + v^T B^{-1}u)^{-1}v^T\right) B^{-1}$

(*on pourra calculer le produit* $\left(B + uv^T\right)\left(I - B^{-1}u(1 + v^T B^{-1}u)^{-1}v^T\right) B^{-1}$)

Q-1-3 : On pose $w = B^{-1}u$ i.e w solution de $Bw = u$. On pose aussi r le réel $r = 1 + v^T w$

Pour un vecteur $F \in \mathbb{R}^n$ donné, on calcule le vecteur x par
etape1) $z = B^{-1}F$
etape2) $s = v^T z$
etape3) $x = z - w\dfrac{s}{r}$
Montrer que x est solution de $Ax = F$.

Q-1-4 : En déduire qu'on peut résoudre des systèmes linéaires $Ax = F$, avec F variant, en ne stockant que :

— la matrice B sous forme factorisée LU (c'est la structure **`MatriceBande`**),
— les vecteurs $w = B^{-1}u$ et v
— le nombre réel $r = 1 + v^T w$.

Proposer et implémenter une structure de données pour résoudre le système linéaire $Ax = F$.

Q-2 : Application à une équation aux dérivées partielles.

On considère l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) & = & 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ u(t,0) & = & u(t,1), & \text{dans } [0,T], \\ u(0,x) & = & u_0(x), & \text{dans } [0,1] \end{array} \right. \tag{6}$$

avec ε et β des constantes positives.

En discrétisant cette équation par une méthode de différences finies en espace sur une maillage :
$\mathcal{X}_n = \{x_i, x_i = i \times h, i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ de pas $h = \frac{1}{n-1}$ de $[0,1]$ et un schéma d'Euler implicite en temps sur une subdivision $\mathcal{T}_m = \{t_k = k \times \Delta t, k \in \{0, \ldots m\}\}$ de pas $\Delta t = \frac{T}{m}$ de $[0,T]$, on a en posant $U^k = [U_0^k, \ldots, U_{n-1}^k]^T$ où U_i^k est une valeur approchée de $u(t_k, x_i)$ (solution du problème au point x_i du maillage à l'instant t_k) le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} U^0 = U_0, \\ G\,U^{k+1} = U^k, \quad \forall\, 0 \le k \le m-1. \end{array} \right. \tag{7}$$

Avec G définie comme en (4) avec $\left\{ \begin{array}{rcl} c_i & = & -\Delta t \frac{\varepsilon}{h^2} - \Delta t \frac{\beta}{h} \\ a_i & = & 1 + \Delta t \frac{2\varepsilon}{h^2} + \Delta t \frac{\beta}{h} \\ b_i & = & -\Delta t \frac{\varepsilon}{h^2} \end{array} \right. \quad \forall i = 0, \ldots, n-1.$

Pour les données suivantes $\varepsilon = 1e-5, \beta = 0.1, \ T = 10, \ n = 200, \ m = 10000, \ u_0(x) = e^{-1000(x-0.5)^2}$.
Ecrire un fichier **`solution_0.txt`** au format lisible par `Gnuplot` la solution U^0. Ecrire aussi dans un fichier **`solution_m.txt`** la solution U^m.