Examen : 12 mai 2016 (Durée 3h00)

On s'intéresse à la *discrétisation* par différences finies et à la résolution *efficace* du problème discret obtenu. Il est question de convaincre de la pertinence des choix effectués. Le problème modèle considéré est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega =]a,b[\times]c,d[. \\ u(x,y) = g(x,y), \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où, f et g sont des fonctions données continues. On admettra que ce problème admet une unique solution suffisamment régulière permettant son évaluation en tout point du domaine $\bar{\Omega}$.
Nous nous intéressons à sa discrétisation par différences finies sur une grille τ_h de $\bar{\Omega}$ de pas h dans chaque direction et de sommets $(x_i, y_j), 0 \le i \le n_x+1, 0 \le j \le n_y+1$ avec $x_0 = a, x_{n_x+1} = b, y_0 = c, y_{n_y+1} = d$. Dans la suite on supposera sans nuire à la généralité que $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1, n_x = n_y$.

Thème - 1 *Modélisation d'un schéma aux différences finies préservant l'isotropie de l'opérateur.*

Le laplacien $\Delta u(x,y)$ est connu pour ne privilégier aucune direction de diffusion. Il est dit à cet effet être *isotrope* ;On le remarque par son invariance pour toute rotation du domaine. Dans le processus de construction de schémas numérique pour l'approcher, il serait judicieux de prendre en compte cette propriété.

Le schéma à 5 points classique et ses limites

Le schéma à 5 points classique pour la discrétisation du problème (1) est le schéma suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j}}{h^2} = f(x_i, y_j), \quad 1 \le i \le n_x \quad 1 \le j \le n_y \\ u_{i,j} = g(x_i, y_j) \quad i,j \text{ tels que } (x_i, y_j) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $u_{i,j}$ est une valeur approchée de $u(x_i, y_j)$ pour tout $0 \le i \le n_x+1, 0 \le j \le n_y+1$.

Pour toute suite $v = (v_{i,j}) \in \mathbb{R}^{(n_x+2)\times(n_y+2)}$ définie sur la grille τ_h de $\bar{\Omega}$, on pose :

$$\tilde{\Delta}_h(v)_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}}{h^2} \quad 1 \le i \le n_x,\ 1 \le j \le n_y. \tag{3}$$

Pour mettre à défaut le schéma à 5 points ci-dessus, on considère deux domaines (*sous-domaines de*) Ω et une fonction ψ qui vaut 0 dans la portion hachurée et 1 ailleurs (voir FIG 1 de Figure 1), La figure FIG 2 présente une rotation du domaine précédent d'un angle $\frac{\pi}{4}$. On sait que la valeur du Laplacien de la fonction ψ au centre de la grille associée devrait donner la même valeur dans les deux cas.

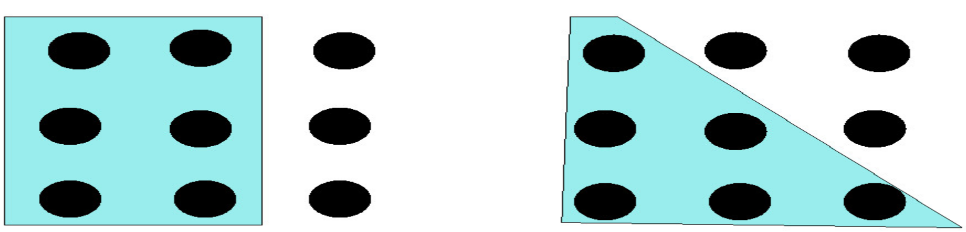

FIG 1 FIG 2

FIGURE 1

Q-1 : En calculant $\tilde{D}1$ resp. $\tilde{D}2$ la valeur du Laplacien de la fonction ψ voir formule (3), au sommet central de la grille de la figure FIG 1 resp. figure FIG 2, déduire que l'opérateur $\tilde{\Delta}_h$ n'est pas invariant par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Variante du schéma à 5 points et ses limites

On considère la variante suivante du schéma à 5 points

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i-1,j-1}-u_{i-1,j+1}-u_{i+1,j-1}-u_{i+1,j+1}+4u_{i,j}}{2h^2} & = & f(x_i,y_j), \quad 1 \le i \le n_x \quad 1 \le j \le n_y \\ u_{i,j} & = & g(x_i,y_j) \quad i,j \text{ tels que } (x_i,y_j) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

On pose cette fois

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_h(v)_{i,j} = \frac{v_{i-1,j-1}+v_{i-1,j+1}+v_{i+1,j-1}+v_{i+1,j+1}-4v_{i,j}}{2h^2} \quad 1 \le i \le n_x,\ 1 \le j \le n_y. \tag{5}$$

Q-2 : En reprenant les calculs précédents en désignant cette fois-ci les valeurs au sommet central des figures FIG 1 resp. FIG 2 par $\tilde{\tilde{D}}1$ resp. $\tilde{\tilde{D}}2$, conclure que l'opérateur $\tilde{\tilde{\Delta}}_h$, n'est pas isotrope non plus.

Vers un schéma invariant par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$

On construit un nouveau schéma par combinaison linéaire des deux schémas ci-dessus. Pour cela on définit l'opérateur

$$\Delta_h(v)_{i,j} = \gamma\tilde{\Delta}_h(v)_{i,j} + (1-\gamma)\tilde{\tilde{\Delta}}_h(v)_{i,j} \quad 1 \le i \le n_x+1,\ 1 \le j \le n_y+1, \tag{6}$$

où $\gamma \in [0,1]$ est un réel que nous allons choisir convenable.

Q-3 : Calculer dans les configurations de figures FIG 1 resp. FIG 2, les valeurs $D1$ resp. $D2$ de $\Delta_h(\psi)$ au sommet central.

Q-4 : En déduire que les valeurs $D1$ et $D2$ sont égales si et seulement si $\gamma = \frac{1}{3}$

Q-5 : Ecrire le schéma numérique ainsi obtenu :

$$\begin{cases} -\Delta_h(u)_{i,j} & = & f(x_i,y_j), \quad 1 \le i \le n_x \quad 1 \le j \le n_y \\ u_{i,j} & = & g(x_i,y_j) \quad i,j \text{ tels que } (x_i,y_j) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

Thème - 2 *Analyse du schéma numérique (7)*

Etude de la consistance du schéma (7)

Q-6 : Le schéma (7) est-il un schéma à 5-points ? Sinon préciser q tel qu'il soit à q-points.

Q-7 : Etudier la consistance du schéma (7).

Etude de la stabilité du schéma (7)

Q-8 : On considère les $n_x \times n_y$, vecteurs $u^{p,q}, 1 \le p \le n_x,\ 1 \le q \le n_y$ définis par :

$$u^{p,q}_{i,j} = \sin\left(\frac{i\pi p}{n_x+1}\right)\sin\left(\frac{j\pi q}{n_y+1}\right), \quad 1 \le i \le n_x,\ 1 \le j \le n_y \tag{8}$$

Q-8-1 : Calculer $\Delta_h(u^{p,q})_{i,j}$ pour $1 \le i \le n_x,\ 1 \le j \le n_y$.

Q-8-2 : En déduire les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice associée au problème (7)

Q-9 : Sans faire de calcul montrer que la matrice du problème (7) est symétrique définie positive.

Q-10 : Déduire des questions précédents que le schéma (7) est stable pour la norme

$$\|v\|_h^2 = h^2 \sum_{1 \le i \le n_x,\ 1 \le j \le n_y} v_{i,j}^2.$$

Thème - 3 *Modélisation de la résolution efficace du problème (7)*

On souhaite appliquer l'algorithme du gradient conjugué à la résolution du problème (7), en évitant le calcul explicite de la matrice A du système linéaire associé.

Modélisation du résidu et conséquences sous hypothèse de matrice A construite.

On suppose que le problème (7) est écrit sous la forme

$$A\,U = F \tag{9}$$

avec U vecteur de $\mathbb{R}^{n_x \times n_y}$.
Le résidu associé au vecteur $V \in R^{n_x \times n_y}$ est défini par $R(V) = F - AV$

Q-11 **:** Calculer $R(O)$ et $R(O) - R(V)$ où O est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{n_x \times n_y}$.

Q-12 **:** En déduire que le système linéaire $AU = F$ est entière défini par la donnée de sa fonction résidu $R(\cdot)$. En déduire en particulier que la disposition de la fonction résidu du système permet de déterminer le produit matrice vecteur par matrice A du système linéaire.

Q-13 **:** Modifier alors l'algorithme du gradient conjugué préconditionné de sorte à remplacer les arguments A et F par la seule fonction résidu $R(\cdot)$ à leur place.

Modélisation du résidu sans calcul de matrice dans le cadre du problème (7).

Q-14 **:** Montrer que pour le problème (7) la fonction résidu est donnée par :

$$W = R(V) \Longleftrightarrow w_{i,j} = f(x_i, y_j) - \Delta_h(v)_{i,j}, \qquad 1 \leq i \leq n_x,\ 1 \leq j \leq n_y. \tag{10}$$

où on a adopté la convection : pour tout vecteur Z de $R^{n_x \times n_y}$ défini sur la grille τ_h, on désigne par $z_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq n_x,\ 1 \leq j \leq n_y$, ses composantes. C'est-à-dire Z est le vecteur obtenu par concaténation des $z_{i,j}$ suivant une certaine (table de) numérotation des sommets internes du maillage (grille) de $\bar{\Omega}$.

Q-15 **:** Donner le prototype d'une fonction en langage de programmation C permettant d'implémenter la fonction résidu ci-dessus. On justifiera le choix des arguments. Et on fournira le contenu de la fonction en pseudo-code.

Q-16 **:** En déduire qu'un algorithme de gradient conjugué préconditionné peut être appliqué à la résolution du problème (7) sans calcul explicite de la matrice A du système linéaire correspondant.

Q-17 **:** Faire une analyse critique de cette approche en la comparant au cas où l'on a construit explicitement la matrice A. On insistera sur les complexités spatiales (c'est-à-dire les besoins en espace mémoire pour stockage).

Thème - 4 *Vers la construction d'un préconditionneur pour le problème (7)*

On sait qu'un préconditionnement diagonale est acceptable car la matrice associée au problème (7) est à diagonale dominante. Nous nous proposons ici de tester des préconditionneurs avec un *stencil* un peu plus large.
Dans toute la suite A est la matrice du système linéaire associée au problème (7).

Préconditionnement par extraction suivant le stencil d'un schéma à 5 points classique.

On considère le schéma à 5 points extrait du schéma (7) et on désigne par A_{5pts} la matrice associée.

Q-18 **:** Montrer que l'opérateur associé est donné par

$$\bar{\Delta}_h(v)_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 8v_{i,j}}{3\,h^2} \quad 1 \leq i \leq n_x,\ 1 \leq j \leq n_y. \tag{11}$$

Q-19 **:** Calculer $\bar{\Delta}_h(u^{p,q})_{i,j}$ pour $\quad 1 \leq i \leq n_x,\ 1 \leq j \leq n_y$, où les $u^{p,q}$ sont donnés par la formule (8).

Q-20 **:** En déduire une majoration du conditionnement de la matrice $A_{5pts}^{-1}\,A$. En évoquant l'estimation d'erreur dans la méthode du gradient conjugué, commenter l'efficacité du préconditionnement par la matrice A_{5pts} de la méthode du gradient conjugué pour le système linéaire $AU = F$.

Q-21 **:** Le préconditionnement par extraction suivant le *sctencil* du schéma à 5 points est-il facile à mettre en place ?

Préconditionnement par extraction suivant le stencil d'un schéma à 3 points

On considère l'opérateur

$$\bar{\bar{\Delta}}_h(v)_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i+1,j} - 8v_{i,j}}{3\ h^2} \quad 1 \leq i \leq n_x,\ 1 \leq j \leq n_y. \tag{12}$$

Et on désigne par A_{3pts} la matrice associée sur la grille τ_h

Q-22 **:** On suppose une numérotation lexicographique des sommets internes de la grille τ_h. Montrer que le préconditionnement du système linéaire $AU = F$ par la matrice A_{3pts} correspond à un préconditionnement par la matrice bloc-diagonale formée des blocs diagonaux de la matrice A. En serait-il de même pour une numérotation quelconque des sommets internes ?

Q-23 **:** Calculer $\bar{\bar{\Delta}}_h(u^{p,q})_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n_x,\ 1 \leq j \leq n_y$, où les $u^{p,q}$ sont donnés par la formule (8).

Q-24 **:** En déduire une majoration du conditionnement de la matrice $A_{3pts}^{-1}\ A$.

Q-25 **:** Ce préconditionnement est-il bénéfique pour la méthode du gradient conjugué ? est-il simple à mettre en oeuvre ?