© J.-B. A. K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>

Devoir surveillé : 27 avril 2017 (Durée 1h30)

IMPORTANT- Consignes

— Les notes de cours et les scripts de TP sont autorisés. La consultation des pages Internet, en particulier de votre message électronique, est interdite. Le non respect de cette consigne entraînera l'annulation de votre note.

— Commencez par créer un répertoire **`M325_DS2_###`** où **`###`** est votre NOM. Travailler dans ce répertoire. Il devra contenir tous les fichiers dont vous aurez eu besoin.

— Lorsque la réponse à une question nécessite des commentaires rédigés, vous devez mettre ces commentaires dans vos fichiers en utilisant les commentaires du langage C.

— A la fin de l'examen, vous devez envoyer votre répertoire **`M325_DS2_###`** zippé, par mail à l' adresse suivante : **`jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr`**

Thème - 1 *Problème, Renumérotations, Matrices bandes et Applications*

On souhaite observer l'influence de la numérotation des inconnues dans la résolution des problèmes.

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante : $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & \forall (x,y) \in \Omega =]a,b[\times]c,d[. \\ u(x,y) = g(x,y), & \forall (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où, f et g sont des fonctions données continues.

Nous nous intéressons à sa discrétisation par différences finies sur une grille de $\bar{\Omega}$ de pas h_x et h_y dans les directions x et y, et de sommets $(x_i, y_j), 0 \le i \le n_x + 1, 0 \le j \le n_y + 1$ avec $x_0 = a, x_{n_x+1} = b, y_0 = c, y_{n_y+1} = d$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{h_x^2}u_{i-1,j} - \frac{1}{h_x^2}u_{i+1,j} - \frac{1}{h_y^2}u_{i,j+1} - \frac{1}{h_y^2}u_{i,j-1} + (\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2})u_{i,j} = f(x_i,y_j), & 1 \le i \le n_x \quad 1 \le j \le n_y \\ u_{i,j} = g(x_i,y_j) & i,j \text{ tels que } (x_i,y_j) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

où $u_{i,j}$ est une valeur approchée de $u(x_i, y_j)$ pour tout $0 \le i \le n_x + 1, 0 \le j \le n_y + 1$.

On construit le système linéaire associé $AU = F$ (voir TP1) avec une numérotation quelconque (pas forcément lexicographique) des noeuds internes du maillage. Ceci conduit à une perte de la structure bande de la matrice du Laplacien 2D. D'où la nécessité de recourir à l'algorithme de Cuthill-Mackey.

Note 1 (Données numériques et guide pour mise en oeuvre)**.**

Dans tout ce qui suit, on prendra :
$f(x,y) = -4, \quad g(x,y) = x^2 + y^2, \quad \Omega =]0,1[\times]0,1[$,
de sorte que la **solution exacte** soit $u(x,y) = x^2 + y^2$.
On pourra utiliser et faire de simples modifications ou rajouts dans les fichiers :
`Laplacien2D.h, Laplacien2D.c, test_Laplacien2D.c` fournis lors dans le TP1.
On utilisera aussi les fichiers **`rcm.h, rcm.c`** fournis dans le TP2.
Il en sera de même de quelques scripts fournis dans la partie **Thème-2** ci-dessous.
On prendra pour les différents tests $n_y = 16$, $n_x = 16$.

Evidence de la perte de la structure bande de numérotation lexicographique

On utilisera les *listings* Listing 2, Listing 1 et Listing 3.

On commence par modifier la numérotation globale des noeuds internes du maillage. Pour cela on remplace dans le fichier **`Laplacien2D.c`** la fonction **`static int **creer_table_numerotation (int nx, int ny)`** par la suivante **`static int **creer_table_numerotation (int nx,int ny,int niveau_bruit)`** fournie dans le Listing 1.

Q-1 : Pour $niveau\_bruit$ valant respectivement 0 et 5, afficher le squelette de la matrice du problème à travers des fichiers **`A_bruit_0.txt`** respectivement **`A_bruit_5.txt`** obtenus en utilisant le Listing 2. On affichera aussi les numérotations des sommets du maillage à travers les fichiers **`table_num_bruit_0.txt`** respectivement **`table_num_bruit_5.txt`** obtenus en utilisant le Listing 3

Q-2 : Les sommets sont-ils numérotés de la même façon dans les deux cas ? Analyser le profile des deux matrices puis mettre en évidence la perte de la structure bande de la matrice pour certaines numérotations des sommets du maillages. Laquelle des matrices est susceptible de subir plus sévèrement le phénomène de remplissage dans une décomposition LU.

Q-3 : Résoudre le problème pour $niveau\_bruit = 5$ et mettre la solution dans un fichier **`"solution_bruit_5.txt"`**. Vérifier que la solution est bonne malgré cette modification de la numérotation globale des sommets internes du maillage.

Evidence de la réduction de la largeur de bande

Dans cette partie on se place dans le cadre $niveau\_bruit = 5$.

Q-4 : En utilisant l'algorithme de Cuthill-Mackey (**`RCM`**) implémenté dans les fichiers **`rcm.h, rcm.c`**, générer la matrice pleine B obtenue par une renumérotation **`RCM`** de la matrice A du système linéaire associé au problème (2).

Q-5 : Afficher le profile de la matrice B ci-dessus dans un fichier **`A_rcm_bruit_5.txt`**. Conclure qu'un stockage bande de la matrice B est possible.

Application

Q-6 : Sur une feuille, expliquer comment faire intervenir la renumérotation **`RCM`** et les matrices bandes (développées dans le TP2) dans la résolution du système linéaire $AU = F$ issus de la discrétisation (2)

Q-7 : Énumérer s'il y en a, les avantages de cette approche.

Q-8 : **Mise en oeuvre.** Implémenter cette approche à travers une fonction de prototype

`void Laplacien2D_resout_systeme_RCM_Bande(Laplacien2D* pb)`

(*On pourra utiliser les scripts développés dans les* **Thème 2** *et* **Thème 3** *du TP2*).

Q-9 : **Validation.** Ecrire la solution dans un fichier **`solution_rcm_bande.txt`**

Q-10 : **Interprétation.** Que remarquez-vous ? On comparera au même cas test lorsque le système linéaire est plutôt résolu par appel de **`Laplacien2D_resout_systeme`**

Listing 1 – Table de numerotation des noeuds internes

```
// Si niveau_bruit = 0 alors aucune perturbation n'est introduite sur la numerotation lexicographique
int ** creer_table_numerotation (int nx, int ny, int niveau_bruit)
{
  int i, j;
  int **C2I = (int **) malloc (nx * sizeof (int *));
  for (i = 0; i < nx; ++i)
    C2I[i] = (int *) calloc (ny, sizeof (int));
  int num = 0;
  for (j = 0; j < ny; j++)
    for (i = 0; i < nx; i++)
      {
        if ((i == 0) || (i == (nx - 1)) || (j == 0) || (j == (ny - 1)))
            C2I[i][j] = -1;
        else
            C2I[i][j] = num++;
      }
   /***************  DEBUT  RAJOUT ******************/
   int niveau_melange = niveau_bruit + 2
   for(int s = 2; s < niveau_melange; s++)
   {
    int k = (ny-1)/s;
    int l = (nx -1)/s;
    for (j = 1; j < k; j+=s)
     for (i = 1; i < l; i+=s)
      {
        int temp = C2I[i][j];
        C2I[i][j] = C2I[i+l][j+k];
        C2I[i+l][j+k] = temp;
      }
     }
   /**************** FIN AJOUT *********************/

  return C2I;
}
```

Listing 2 – Ecriture du squelette d'une matrice dans un fichier pour gnuplot

```
/* @c J.-B. A. K. Cours M325 Calcul Scientifique II 2015 */
/* !
Utilisation : spy_gnuplot_gsl_matrix (A, "A.txt");
Utilisation sous gnuplot :
gnuplot> plot "A.txt" w lp
*/
void
spy_gnuplot_gsl_matrix (gsl_matrix * A, const char *fichier)
{
  int n, m, i, j;
  n = A->size1;
  m = A->size2;
  double eps = 1e-32;
  FILE *fid = fopen (fichier, "w");
  for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = 0; j < m; j++)
      if (fabs (gsl_matrix_get (A, i, j)) > eps)
        fprintf (fid, "%f  %f\n\n", (float) j, (float) (n - i - 1.));
  fclose (fid);
}
```

Listing 3 – Affichage des numéros globaux des sommets du maillage

```
//* @c J.-B. A. K. Cours M325 Calcul Scientifique II 2017 */
/* !
Utilisation :
Laplacien2D pb;
.....
Laplacien2D_affiche_table_numerotation(&pb, "table_num.gnu");
Utilisation sous gnuplot :
gnuplot> load("table_num.gnu")
Utilisation dans un terminal: taper :
gnuplot "table_num.gnu"
*/
void Laplacien2D_affiche_table_numerotation(Laplacien2D* pb, const char* nomFichier)
```

```
{
  int i, j;
  FILE* fid = fopen(nomFichier,"w");
  int nx, ny, **C2I;
  nx = pb->n + 2;
  ny = pb->m + 2;
  C2I = pb->C2I;
  fprintf(fid, "unset xtics \nunset ytics \nunset border\n");
  fprintf(fid,"set title \"Numerotation globale des noeuds\"\n");
  for(i = 0; i < nx; i++)
     for(j = 0; j < ny; j++){
         if(C2I[i][j] >= 0)
          fprintf(fid," set label \"%d\" at %d,%d left tc rgb \"#0000FF\" \n", C2I[i][j], i, j);
         else
          fprintf(fid," set label \"%d\" at %d,%d left tc rgb \"#FF0000\" \n", C2I[i][j], i, j);
     }
  fprintf(fid, "plot(\"-\") w l lt 0 lc 1 \n");
  for(i = 0; i < nx; i++){
      fprintf(fid, "%d  %d \n", i, 0);
      fprintf(fid, "%d  %d \n\n", i, ny-1);
  }
  for(j = 0; j < ny; j++){
      fprintf(fid, "%d  %d \n", 0, j);
      fprintf(fid, "%d %d \n\n", nx-1, j);
  }
  fprintf(fid, "e\n pause(-1)\n");
  fclose(fid);
}
```