Examen : 11 mai 2017 (Durée 3h00)

CONSIGNES : Les notes de cours sur papier sont autorisées. Les téléphones portables ne sont pas autorisés La consultation des pages Internet, en particulier de votre message électronique, est interdite.

Note 1.

Bon nombres de problèmes physiques dans leur discrétisation conduisent à un système linéaire de la forme

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} \tag{1}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice carrée, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ une matrice rectangulaire, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ une matrice carrée, et $F \in \mathbb{R}^n, G \in \mathbb{R}^m$ des vecteur, B^T désignant la matrice transposée de B.
Dans la plupart des cas on peut calculer et stocker sans coût extrême la matrice A^{-1}. On aimerais alors dans ce contexte mettre en place un algorithme simple de résolution du système (1). C'est le but de cet épreuve. Pour simplifier l'analyse on se placera dans un cadre où $C = 0$, (c'est le cas par exemple d'un problème dit de *Stokes*). Mais avant, en guise de motivation, nous allons présenter une problème 1D simple (de prise en compte des conditions aux limites) qui rentre dans cadre du formalisme décrit par l'équation (1). On montrera pour ce problème qu'un calcul explicite de A^{-1} est possible.
Le sujet est formé de 3 thèmes qu'on peut considérés indépendants.
On peut admettre les résultats des questions précédentes lors de la réponse à une question.

Thème - 1 *Un exemple de problème rentrant dans le formalisme de (1)*

On considère l'équation

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\kappa\, u''(x) &=& f(x) & \text{dans }]0,1[, \\ -\kappa\, u'(0) + \varepsilon\; u(0) &=& \varepsilon\; g_0, & \\ \kappa\, u'(1) + \varepsilon\; u(1) &=& \varepsilon\; g_1, & \end{array}\right. \tag{2}$$

avec $\varepsilon > 0$ et $\kappa > \varepsilon$ des constantes positives, f une fonction donnée et g_0, g_1 sont deux constantes réelles.

Q-1 : **Existence unicité de la solution de cette équation**
On suppose $f \equiv 1$. Déterminer l'unique solution du problème (2) et montrer qu'elle est au moins de classe C^2.
Dans la suite on suppose f continue sur $[0,1]$ et on admet que (2) admet une unique solution de classe C^2 au moins.

Q-2 : **Stabilité de la solution**. Soit u l'unique solution obtenue ci-dessus.

Q-2-1 : En multipliant la première équation de (2) par $u(x)$ et intégrant par parties sur $[0,1]$, et en prenant en compte les conditions aux limites (deuxième et troisième équation de (2)), montrer que

$$\kappa \int_0^1 (u'(x))^2\, dx + \varepsilon\, u(0)^2 + \varepsilon\, u(1)^2 = \varepsilon\, g_0\, u(0) + \varepsilon\, g_1\, u(1) + \int_0^1 f(x) u(x)\, dx$$

Q-2-2 : On admet que si $a \in \{0,1\}$, on a $|u(a)| < \|u\|_{L^2(]0,1[}$, $2u(a)^2 \geq \|u\|^2_{L^2(]0,1[} - \|u'\|^2_{L^2(]0,1[}$. Montrer que

- $\left|\varepsilon\, g_0\, u(0) + \varepsilon\, g_1\, u(1) + \int_0^1 f(x)u(x)\, dx\right| \leq \left(\varepsilon\, |g_0| + \varepsilon\, |g_1| + \|f\|_{L^2(]0,1[)}\right) \|u\|_{L^2(]0,1[}$
- $\kappa \int_0^1 (u'(x))^2\, dx + \varepsilon\, u(0)^2 + \varepsilon\, u(1)^2 \geq \varepsilon\, \|u\|^2_{L^2(]0,1[}$

Q-2-3 : En déduire que

$$\|u\|_{L^2(]0,1[} \leq |g_0| + |g_1| + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^2(]0,1[}. \tag{3}$$

Q-3 : **Discrétisation par différences finies**

On considère un maillage uniforme de pas $h = \frac{1}{n+1}, n > 1$ de $[0,1]$, de noeuds

$$\mathcal{X}_n = \{x_i, x_i = i \times h, i \in \{0, \dots, n+1\}\}.$$

Q-3-1 : Soit u solution de (2). Montrer que u vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl} \kappa \dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} & = & f(x_i) + \mathcal{O}(h^2) \quad 1 \le i \le n, \\ -\kappa \dfrac{-u(x_0) + u(x_1)}{h} + \varepsilon\, u(x_0) & = & \varepsilon\, g_0 + \mathcal{O}(h) \\ \kappa \dfrac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} + \varepsilon\, u(x_{n+1}) & = & \varepsilon\, g_1 + \mathcal{O}(h) \end{array}\right. \tag{4}$$

On pose $u_i \approx u(x_i),\ i = 0, \dots, n+1$ tel que $(u_i)_{0 \le i \le n+1}$ soit solution de

$$\left\{\begin{array}{rcl} -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} & = & \dfrac{h^2}{\kappa} f(x_i) \quad 1 \le i \le n, \\ (1 + \dfrac{\varepsilon\, h}{\kappa})\, u_0 - u_1 & = & \dfrac{\varepsilon\, h}{\kappa}\, g_0 \\ (1 + \dfrac{\varepsilon\, h}{\kappa})\, u_{n+1} - u_n & = & \dfrac{\varepsilon\, h}{\kappa}\, g_1 \end{array}\right. \tag{5}$$

Q-4 : **Analyse du schéma (5)**

Q-4-1 : Donner sans faire de calcul l'ordre de consistance du schéma (5).

Q-4-2 : Montrer que le problème (5) rentre dans le cadre du formalisme (1), avec $m = 2$,

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_{n+1} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ F = \frac{h^2}{\kappa} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix} \tag{6}$$

On précisera B, C et G. (*On pourra se placer dans le cas $n = 3$ pour mieux observer.*).

Q-4-3 : L'existence et l'unicité de la solution de (5) seront abordées dans le Thème 3. On admet ici que le schéma (5) est stable. Déduire alors que la solution du problème (5) converge vers celle de (2) et préciser l' ordre de convergence.

Thème - 2 *Un exemple de construction explicite de A^{-1} dans un problème de type (1)*

On considère le problème (5) obtenu ci-dessus, où la matrice A est donnée par la formule (6). On s'intéresse ici à la construction explicite de A^{-1}. Pour cela on considère la résolution dans $\mathbb{R}^n$ du système linéaire :

$\mathbf{A\,x = f}$ où $\mathbf{A} = \text{tridiag}(\mathbf{-1, 2, -1})$ est la matrice donnée par (6) où x, f sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(7)

Q-5 :

On introduit alors les n vecteurs $(d^{(k)})_{k=1}^n)$ de $\mathbb{R}^n$, avec $d^(k)$ un vecteur donc la $j-$ème composante est définie par :

$$d_j^{(k)} = j \quad \text{pour} \quad 1 \le j \le k \qquad \text{et} \quad d_j^{(k)} = 0 \quad \text{pour} \quad k < j \le n.$$

Q-5-1 **:** Calculer les produits scalaires $(Ad^{(k)}, d^{(k')})$ pour $1 \leq k, k' \leq n$.
on remarquera que seules les composantes k et $k+1$ de $Ad^{(k)}$ sont non nulles.

Q-5-2 **:** En déduire que les $(d^{(k)})_{k=1}^{n})$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Q-5-3 **:** On écrit la solution du système $Ax = f$ dans la base des $(d^{(k)})_{k=1}^{n})$: $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k d^{(k)}$.

Calculer les coefficients α_k en fonction de f et des $(d^{(k)})_{k=1}^{n})$. Commenter.

Q-5-4 **:** On écrit cette fois x et f dans la base canonique $(e_k)_{k=1}^{n}$ de $\mathbb{R}^n$ $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $f = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j$

- Déduire de la question précédente que

$$x_i = i \sum_{k=i}^{n} \frac{(f, d^{(k)})}{k(k+1)}.$$

- Exprimer x_i en fonction des f_j. En déduire l'expression explicite suivante de la matrice A^{-1} :

$$(A^{-1})_{i,j} = j \frac{n+1-i}{n+1} \quad \text{pour} \quad j \leq i. \tag{8}$$

(*On remarquera que* $\sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1-i}{i(n+1)}$).

$\boxed{\textbf{Q-6} \quad \textbf{:}}$ Est-il plus économique (en nombre d'opérations, i.e. multiplications et divisions) de résoudre le système linéaire $Ax = f$ ou de calculer x par la formule $x = A^{-1}f$? On suppose A^{-1} connu, c'est-à-dire que les coefficients $(A^{-1})_{i,j}$ sont déjà calculés.

Thème - 3 *Un algorithme de résolution de (1), lorsque $C \equiv 0, G \equiv 0$*

On considère le problème (1) dans le cadre suivant :
- $C = 0, G = 0$
- A est symétrique définie positive.
- B est rectangulaire ($m \neq n$) de noyau $Ker(B) = \{y \in R^m, By = 0\}$ réduit à l'ensemble $\{0\}$ (c'est-à-dire que l'application linéaire associée à B est injective).

Pour simplifier l'écriture, les inconnues $U \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathbb{R}^m$ ainsi que le vecteur F, seront désignées respectivement par x, y et b, de sorte que le problème s'écrive : Cherche $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in R^m$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A\ x + B\,y & = & b, \\ B^T\,x & = & 0 \end{array} \right. \tag{9}$$

$\boxed{\textbf{Q-7} \quad \textbf{:}}$ **Existence et unicité de la solution du problème**

Q-7-1 **:** Montrer que la matrice A^{-1} est symétrique définie positive.

Q-7-2 **:** Montrer que la matrice $B^T A^{-1} B$ est symétrique définie positive

Q-7-3 **:** Montrer que le problème (9) admet une solution (x, y) unique.

$\boxed{\textbf{Q-8} \quad \textbf{:}}$ **Calcule de la solution**

Pour calculer l'unique solution de (9) on utilise la méthode itérative suivante :
- On se donne $y_0 \in \mathbb{R}^m$
- $y_k \in \mathbb{R}^m$ étant connu, on calcule successivement $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ puis $y_{k+1} \in \mathbb{R}^m$ par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A\,x_{k+1} & = & b - B\,y_k, \\ y_{k+1} & = & y_k + \alpha B^T\,x_{k+1}, \end{array} \right. \tag{10}$$

où α est un nombre réel strictement positif.

Q-8-1 **:** Calculer y_{k+1} en fonction de y_k.

Q-8-2 **:** Montrer que la méthode itérative converge (C'est-à-dire que les suites $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ convergent) si et seulement si

$$0 < \alpha < \frac{2}{\mu_{max}}, \tag{11}$$

μ_{max} désignant la plus grande valeur propre de $B^T A^{-1} B$.

Q-8-3 **:** Montrer que toute valeur propre de $B^T A^{-1} B$ est aussi valeur propre de $BB^T A^{-1}$.

Q-8-4 **:** Montrer que

$$\mu_{max} < \frac{\beta}{\gamma}, \tag{12}$$

où γ est la plus petite valeur propre de A et β est la plus grande valeur propre de $B^T B$. (*On utilisera la caractérisation suivante de la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique* D : $\lambda_{max}(D) = \max_{x \in R^n, x \neq 0} \frac{(Dx, x)}{(x, x)}$.)

$\boxed{\textbf{Q-}9 \ \ \textbf{:}}$ **Estimation d'erreur**.

Donner l'estimation d'erreur commise sur la solution y_k. C'est-à-dire une majoration de $\|y - y_k\|$ en fonction de $\|y - y_0\|, k, \beta, \gamma, A, B$.

$\boxed{\textbf{Q-}10 \ \ \textbf{:}}$ **Résolution effective** Expliquer comment on peut calculer, en pratique, la solution de (10).

$\boxed{\textbf{Q-}11 \ \ \textbf{:}}$ **Interprétation comme préconditionnement**

Q-11-1 **:** Ecrire l'équation vérifiée par la limite de la suite (x, y).

Q-11-2 **:** La méthode (10) peut-elle être interprétée comme une méthode de gradient à pas fixe préconditionnée appliquée au système :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$