TP 1 : Méthode de Galerkin

On s'intéresse à l'approximation du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in V \quad \text{tel que} \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{1}$$

où V un espace de Hilbert, $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, $l(\cdot) : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

Exercice - 1 *Exemples*

On considère les problèmes monodimensionnels suivants dans lesquels, la fonction $q(x)$ sera supposée continue et bornée c-à-d. $0 < q_0 \leq q(x) \leq q_1$ et ν_1, ν_2 seront des constantes strictement positives. La fonction $f(x)$ apparaissant à plusieurs reprise sera supposée dans $L^2(\Omega)$, où Ω est le domaine (ici un intervalle de $\mathbb{R}$). Pour toute fonction $u(x)$ on posera $u' = \frac{du}{dx}, u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$

$$(a) \begin{cases} -\nu_2 u'' = f \ \text{ dans } \ ]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} \nu_1 u - \nu_2 u'' = \ln(x) \ \text{ dans } \ ]0,1[\\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -\nu_2 u'' = f \ \text{ dans } \ ]0,1[\\ u(0) = a, u(1) = b, \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} -\left(q(x)u'\right)' = f \ \text{ dans } \ ]0,1[\\ u'(0) = a, q(1)u'(1) = b. \end{cases}$$

Q-1 **:** Donner leur formulation variationnelle.

Q-2 **:** Montrer que les problèmes variationnels sont bien posés. C'est-à-dire, qu'ils possèdent une et une seul solution, qui plus est stable vis à vis des données du problème.

Exercice - 2 *Approximation interne*

On introduit un paramètre h destiné à tendre vers zéro. On considère un sous-espace vectoriel $V_h \subset V$ de dimension finie N_h. Et on considère le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u_h \in V_h \quad \text{tel que} \\ a(u_h,v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{2}$$

Q-1 **:** Justifier l'orthoganilité de Galerkin suivante :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

En déduire que

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Q-2 **:** On suppose a continue et coercive, montrer que

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad \|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \tag{3}$$

Q-3 **:** On émet l'hypothèse suivante

$$\text{(H)} \quad \forall v \in V, \quad \exists v_h \in V_h \quad \text{tel que} \quad \lim_{h \to 0} \|v - v_h\|_V = 0. \tag{4}$$

ce qui revient au même de dire que,

$$\exists \pi_h : V \to V_h \quad \textit{tel que} \quad \lim_{h \to 0} \|v - \pi_h v\|_V = 0.$$

Montrer alors que la solution du problème (2) converge vers celle du problème (1).

Q-4 **:** En introduisant $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$ une base de V_h, montrer que le problème (2) est équivalent au suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad U \in \mathbb{R}^{N_h} \quad \text{tel que} \\ AU = F \end{cases} \tag{5}$$

Q-5 **:** Proposer une méthode de résolution possible du problème (5).

Exercice - 3 *Illustrations*

Q-1 **:** On considère le problème suivant

$$(a) \begin{cases} -u'' = \ln(x) \ \text{dans} \ ]0,1[\\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 1. \end{cases}$$

Q-1-1 **:** Vérifier que la formulation du problème est donnée par (1) avec

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad l(v) = v(1) + \int_0^1 \ln(x)v(x)dx, \quad V = \{v \in H^1(]0,1[) : v(0) = 0\}.$$

Q-1-2 **:** Vérifier que pour tout $i \in \mathbb{N}^*, \varphi_i = x^i \in V$. (*Ici, x^i désigne le monôme de dergré i.*)

On pose $h = \frac{1}{N}$ et on considère V_h l'espace engendré par $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N_h}$.

1. *Montrer que $V_h \subset V$.*
2. *Montrer que les coefficients de la matrice A et du vecteur F du problème matriciel associé sont données par*

$$A_{i,j} = \frac{ij}{i+j-1}, \qquad F_i = 1 - \frac{1}{(i+1)^2} \quad \forall 1 \leq i,j \leq N.$$

Q-1-3 **:** Programmation

1. Écrire une fonction `Matlab`
   `function [A,F] = Monome_Galerkin( N )`
   qui construit la matrice et A le vecteur F pour la donnée de A.
2. Pour différentes valeurs de $N = 2, 4, 5, 6$, représenter graphiquement la matrice A et vérifier sa structure. Est-elle creuse ? Comment évolue son conditionnement ?

Q-1-4 **:** Évaluation

1. Vérifier que la solution exacte du problème (a) est $u(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x)$.
2. Écrire un script
   `function [res] = Tes_Monome_Galerkin(N)`
   qui évalue votre code, en représentant sur le même graphique la solution exacte et la solution approchée du problème (a).
3. expliquer le comportement de ces courbes pour des valeurs de N de plus en plus grandes.

Q-2 **:** Refaire la même démarche pour le problème suivant

$$(b)\begin{cases} -u'' + u = 0 \ \text{ dans } \ ]0,1[\\ u(0) = 1, \\ u'(1) + u(1) = 0. \end{cases}$$

– *Pour la formulation variationnelle, on commencera par rendre homogène la condition au limite :* $u = 1$.
  On pourra par exemple introduire la nouvelle inconnue $w = u - 1$.
  On montrera alors que w *vérifie le problème (1) avec*

$$a(w,v) = \int_0^1 \big(w'(x)v'(x) + w(x)v(x)\big)\,dx + w(1)v(1),$$

$$l(v) = -\int_0^1 \ln(x)v(x)dx - v(1), \qquad V = \{v \in H^1(]0,1[) : v(0) = 0\}.$$

– *Pour l'approximation on prendra la même base que ci-dessus. On montrera que :*

$$A_{i,j} = \frac{ij}{i+j-1} + \frac{1}{i+j+1} + 1, \qquad F_i = -\left(1 + \frac{1}{i+1}\right) \qquad \forall 1 \le i,j \le N.$$

– *Pour le test numérique, on vérifiera que la solution exacte de (b) est* $u(x) = e^x$

Exercice - 4 *Critiques*

Q-1 **:** Existe-t-il un choix unique pour l'espace d'approximation V_h ?

Q-2 **:** Quel est le défaut majeur de la construction lorsque N tend vers l'infini ?

Q-3 **:** Peut-on construire l'espace V_h (i.e choisir les fonctions de base $(\varphi_i)_{1\le i\le N}$), de sorte à rendre la matrice A plus creuse et mieux conditionnée ? (*Examiner le cas des fonctions polynomiales par morceau*).