TP 2 : Un premier exemple d' éléments finis P1-Lagrange en dimension 1

Exercice - 1 *Problème et motivation*

On se place dans les conditions du TP1 précédent dont la description succincte est la suivante :

On a considéré le problème suivant

$$(a)\begin{cases} -u'' = \ln(x) \text{ dans }]0,1[, \\ u(0)=0, \\ u'(1)=1, \end{cases} \tag{1}$$

dont la solution exacte est $u(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x)$.

Une formulation variationnelle est donnée par

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u \in V \quad \text{tel que} \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{2}$$

avec

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad l(v) = v(1) + \int_0^1 \ln(x)v(x)dx, \quad V = \{v \in H^1(]0,1[) : v(0) = 0\}.$$

Pour approcher ce problème on a utilisé la méthode de Riez-Galerkin, consistant à ramener le problème (2) sous la forme

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u_h \in V_h \quad \text{tel que} \\ a(u_h,v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{3}$$

On sait dans ce cas que la difficulté principale est le choix de l'espace $V_h \subset V$ ou plus particulièrement une base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq N}$ de cet espace.

Le choix adopté a consisté à prendre pour φ_i, le monôme de degré i ; c'est-à-dire $\varphi_i \equiv x^i$.

On s'est tout de suite rendu compte que malgré la bonne approximation obtenue, la matrice du système linéaire obtenue est
- *pleine*
- *mal conditionnée. Le conditionnement étant d'autant plus mauvais que N devient grand.*

Q-1 **: Question complémentaire du TP précédent**

En utilisant la fonction `Matlab`

```
function [A,F] = Monome_Galerkin( N )
```

du TP précédent, représenter graphiquement à l'échelle logarithmique le conditionnement de la matrice A en fonction de la taille N du système (*on utilisera la commande* `cond` *de* `Matlab`). Commenter le résultat obtenu ?

On se propose ici de construire différemment l'espace V_h : on va utiliser la méthode d'**éléments finis Lagrange** de degré 1.

Exercice - 2 *Approximation par éléments finis P_1-Lagrange*

On considère un maillage du domaine Ω, c'est-à-dire une suite de points

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{N_{so}} = 1,$$

On pose $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ la maille i, $i \in \{1, \ldots, N_{ma}\}$ où $N_{ma} = N_{so} - 1$ est le nombre de mailles.

La méthode d'éléments finis P_1-Lagrange propose comme approximation de l'espace $H^1(]0,1[)$, l'espace

$$X_h^1 = \{v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) \text{ tel que } u_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_1(I_i)\}$$

où $\mathcal{P}_1(I_i)$ est l'espace des polynômes de degré au plus 1 sur I_i. C'est-à-dire $p \in \mathcal{P}_1(I_i) \Rightarrow \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ p = a_0 + a_1 x$.

Q-1 **: Caractérisation de X_h^1**

Q-1**-**1 **:** Vérifier que X_h^1 est un sous-espace vectoriel de $H^1(]0,1[)$ dont une base $(\phi_i)_{1 \le i \le N_{so}}$ est formée des fonctions définies par

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q-1**-**2 **:** Donner l'expression de ϕ_i pour $i = 1$, $i = N_{so}$, ainsi que pour $1 < i < N_{so}$. Préciser les supports de ϕ_i dans chaque cas.

Q-2 **: Espace d'approximation V_h**

Comme on sait construire un sous espace de $H^1(]0,1[)$ formé des fonctions polynomiales de degré au plus 1 sur chaque maille, on peut en déduire assez simplement une construction de V_h.

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) \text{ tel que } u_h|_{I_i} \in \mathcal{P}_1(I_i), v_h(0) = 0\}.$$

Q-2**-**1 **:** Vérifier qu'on peut aussi écrire $V_h = \{v_h \in X_h^1 \text{ tel que } v_h(0) = 0\}$.

Q-2**-**2 **:** En déduire qu'une base de V_h est $(\varphi_i)_{1 \le i \le N}$ avec $N = N_{so} - 1$ et

$$\varphi_i = \phi_{i+1} \quad \forall\, 1 \le i \le N_{so} - 1.$$

Q-3 **: Problème matriciel**

Q-3**-**1 **:** Montrer que le problème (3) se ramène à un problème du type $A\,U = F$.

Q-3**-**2 **:** Sans faire de calcul, indiquer les éléments non nuls d'une ligne $1 \le i \le N$ de la matrice A.

Q-3**-**3 **:** Calculer explicitement les éléments

$$A_{i,j},\ 1 \le i, j \le N \quad \text{de la matrice A et} \quad F_i,\ 1 \le i \le N \text{ du vecteur } F$$

.

Q-4 **: Programmation**

Q-4-1 **:**

1. Écrire une fonction `Matlab`
   `function [A,F] = LaplaceP1Lagrange( Nma )`
   qui construit la matrice et A le vecteur F pour une subdivision de $[0, 1]$ en `Nma` mailles.
2. Pour des valeurs de $N_{ma} = 8, 16, 32, 64$, représenter graphiquement la matrice A et vérifier sa structure creuse. Comment évolue son conditionnement en fonction de sa taille ?

Q-4-2 **:**

1. Écrire un script
   `function [res] = TesLaplaceP1Lagrange( Nma )`
   qui évalue votre code, en représentant sur le même graphique la solution exacte et la solution approchée du problème (a).
2. Expliquer le comportement de ces courbes pour des valeurs de N_{ma} de plus en plus grandes.

Q-5 **: Test de convergence**

On rappelle que dans notre cas, le pas h du maillage uniforme est relié au nombre de maille N_{ma} par la relation $h = \frac{1}{N_{ma}}$

1. Faites alors varier le pas h du maillage de $\frac{1}{100}$ à $\frac{1}{10}$ par pas de $\frac{1}{100}$ et représenter graphiquement à l'échelle logarithmique les erreurs $e_{0h} = \|u - u_h\|_{L^2(0,1)}$ et $e_{1h} = \|u' - u_h^{'}\|_{L^2(0,1)}$ en fonction de h. (*On rappelle que le calcul de ces erreurs peut se faire par sommation des contributions de chaque maille*).
2. Déterminer graphiquement les valeurs approchées des constantes C_0, C_1 et α_0, α_1 telles que

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \approx C_0 h^{\alpha_0}, \qquad \|u' - u_h^{'}\|_{L^2(0,1)} \approx C_1 h^{\alpha_1}.$$

   Conclure que l'approximation du problème par la méthode des éléments finis P_1-Lagrange converge numériquement. Préciser l'ordre de convergence.