

TP3 : Exemple de mise en oeuvre de la méthode d’éléments finis, cas 1D

Ce TP a pour but de suivre les étapes de mise en oeuvre de la méthode des éléments finis sur un problème modèle monodimensionnel. Les éléments finis concernés seront les éléments finis Lagrange de degré 1 et 2.

Exercice - 1

On cherche à résoudre un problème modèle d’équation elliptique du second ordre en dimension 1.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

On considère l’ouvert $\Omega =]0, 1[$, $f \in L^2(\Omega)$.

Q-1 : Formulation Variationnelle

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } v' \in L^2(\Omega)\}, \quad H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Q-1-1 : Montrer que la solution u de l’équation (1) vérifie le problème variationnel suivant

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} u'(x)v'(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \quad (2)$$

Q-1-2 : Montrer l’existence et l’unicité de la solution du problème (2).

Q-2 : Discrétisation

On utilise la méthode des éléments finis P_r –Lagrange ($r = 1, 2$) pour déterminer une solution approchée de ce problème. On considère un maillage du domaine Ω , c’est-à-dire une suite de N_{so} points

$$0 = x_1 < \dots < x_{N_{so}-1} < x_{N_{so}} = 1,$$

qui génère $N_{ma} = N_{so} - 1$ mailles $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.

On introduit X_h^r le sous-espace de $H^1(\Omega)$ et X_{0h}^r son sous-espace, définis par

$$X_h^r = \{v_h \in C^0([0, 1]) \text{ tel que } u_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_r\}, \quad X_{0h}^r = \{v_h \in X_h^r \text{ tel que } v_h(0) = v_h(1) = 0\},$$

où \mathbb{P}_r est l’espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à r .

Q-2-1 : Montrer que X_{0h}^r est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie.

Q-2-2 : Vérifier que le problème variationnel discret

$$\forall v_h \in X_{0h}^r, \quad \int_{\Omega} u_h'(x)v_h'(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v_h(x) dx, \quad (3)$$

admet une solution, qui plus est unique.

Q-2-3 : Montrer que résoudre le problème (3) revient à résoudre un système linéaire de la forme

$$A U = b.$$

(On précisera la taille de A , U , et b .)

Les exercices 2 et 3 suivants construisent A et b .

Exercice - 2 Éléments finis P_1 -Lagrange

On désigne par X les sommets x_i du maillage.

1. On appelle table de degrés de liberté la table à deux entrées $l2g(.,.)$ telle que $l2g(i,j)$ est égale au numéro global du degré de liberté numéro j de l'élément i .

Montrer que la table des degrés de liberté est définie par

$$l2g(i,j) = i + j - 1 \quad 1 \leq i \leq N_{ma}, 1 \leq j \leq 2.$$

2. **Traitement élémentaire.** Soit $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, une maille quelconque.

(a) Expliciter les fonctions de base locale P_1 -Lagrange définies par

$$\phi_1^i(x_i) = 1, \quad \phi_1^i(x_{i+1}) = 0, \quad \phi_2^i(x_i) = 0, \quad \phi_2^i(x_{i+1}) = 1.$$

- (b) Calculer explicitement la matrice élémentaire $A_{l,m}^i = \int_{I_i} (\phi_l^i)' (\phi_m^i)' dx \quad 1 \leq l, m \leq 2$,
et le second membre élémentaire $b_l^i = \int_{I_i} f \phi_l^i dx \quad 1 \leq l \leq 2$.

Pour calculer le second membre, on utilisera la formule des trapèzes :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} (\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})).$$

- (c) Écrire une fonction Matlab de prototype

function [Ai,bi] = elementLaplaceP1(xi1,xi2,i)

qui calcule la matrice et le second membre élémentaires relatifs à l'élément $I_i = [x_{i1}, x_{i2}]$.

La fonction f sera fournie par un fichier $f.m$

3. **Assemblage** : On rappelle que pour assembler les matrice et vecteur élémentaires A^i et b^i , on utilise

```
Assemblage d'une contribution élémentaire
nbdl = 2; %nombre de degre de liberte dans I_i
A(l2g(i,1:nbdl), l2g(i,1:nbdl)) = A(i,l2g(i,1:nbdl), l2g(i,1:nbdl)) + Ai(1:nbdl,1:nbdl);
b(l2g(i,1:nbdl)) = b(l2g(i,1:nbdl)) + bi(1:nbdl);
```

Écrire une fonction Matlab de prototype **function [A,b] = assembleLaplaceP1(X)** qui assemble la matrice globale et le second membre global du problème du laplacien discrétisé par élément finis P_1 -Lagrange.

4. **Conditions aux limites** : Expliquer comment introduire les conditions aux limites $u_h(0) = u_h(1) = 0$.
Écrire une fonction Matlab de prototype

function [A,b] = conditionLimiteLaplaceP1(X,A,b) qui modifie la matrice globale A et le second membre global b pour prendre en compte les conditions aux limites $u_h(0) = u_h(1) = 0$.

Écrire une fonction Matlab de prototype **function [A,b] = laplaceP1(X)** qui assemble la matrice et le second membre de la discrétisation par éléments finis P_1 -Lagrange ;

Exercice - 3 Éléments finis P_2 -Lagrange

On désigne toujours par X les sommets x_i du maillage, qu'il ne faut pas confondre avec la position des degrés de liberté (ou noeuds).

1. Montrer qu'un choix de table des degrés de liberté peut être

$$l2g(i, 1) = i, \quad l2g(i, 2) = N_{so} + i, \quad l2g(i, 3) = i + 1, \quad 1 \leq i \leq N_{ma}.$$

Ce choix (voir cours) permet de numérotter en dernier les degrés de liberté associés aux noeuds internes aux mailles. D'autres choix sont possibles.

2. **Traitement élémentaire.** Soit $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, une maille quelconque et $x_{i+\frac{1}{2}}$ son point milieu.

- (a) Expliciter les fonctions de base locale P_2 -Lagrange définies par

$$\begin{aligned} \phi_1^i(x_i) &= 1, & \phi_1^i(x_{i+\frac{1}{2}}) &= 0, & \phi_1^i(x_{i+1}) &= 0, \\ \phi_2^i(x_i) &= 0, & \phi_2^i(x_{i+\frac{1}{2}}) &= 1, & \phi_2^i(x_{i+1}) &= 0, \\ \phi_3^i(x_i) &= 0, & \phi_3^i(x_{i+\frac{1}{2}}) &= 0, & \phi_3^i(x_{i+1}) &= 1. \end{aligned}$$

Attention à l'ordre (dite numérotation locale) des fonctions de base locale, imposé par la table des degrés de liberté $l2g$. En effet, la fonction de base locale n^o1 est associée au noeud x_i , celle n^o2 est associée au noeud $x_{i+\frac{1}{2}}$, et celle n^o3 à x_{i+1} .

- (b) Calculer explicitement la matrice élémentaire $A_{l,m}^i = \int_{I_i} (\phi_l^i)' (\phi_m^i)' dx \quad 1 \leq l, m \leq 3$, et le second membre élémentaire $b_l^i = \int_{I_i} f \phi_l^i dx \quad 1 \leq l \leq 3$.

Pour calculer le second membre, on utilisera la formule de quadrature de Simpson :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(\psi(x_i) + 4\psi(x_{i+\frac{1}{2}}) + \psi(x_{i+1}) \right).$$

- (c) Écrire une fonction Matlab de prototype

function [Ai,bi] = elementLaplaceP2(xi1,xi2,i)

qui calcule la matrice et le second membre élémentaires relatifs à l'élément $I_i = [xi1, xi2]$.

La fonction f sera fournie par un fichier $f.m$.

3. **Assemblage :** On rappelle que pour assembler les matrice et vecteur élémentaires A^i et b^i , on utilise

Assemblage d'une contribution élémentaire

```
A(l2g(i,:), l2g(i,:)) = A(l2g(i,:), l2g(i,:)) + Ai;
b(l2g(i,:)) = b(l2g(i,:)) + bi;
```

Écrire une fonction Matlab de prototype **function [A,b] = assembleLaplaceP2(X)** qui assemble la matrice globale et le second membre global du problème du laplacien discrétisé par élément finis P_2 -Lagrange.

4. **Conditions aux limites :** Expliquer comment introduire les conditions aux limites $u_h(0) = u_h(1) = 0$. (Attention à la numérotation des degrés de liberté : le noeud $x = 1$ n'est pas le dernier degré de liberté).

Écrire une fonction Matlab de prototype

function [A,b] = conditionLimiteLaplaceP2(X,A,b) qui modifie la matrice globale

A et le second membre global b pour prendre en compte les conditions aux limites $u_h(0) = u_h(1) = 0$.

Écrire une fonction Matlab de prototype **function [A,b] = laplaceP2(X)** qui assemble la matrice et le second membre de la discrétisation par éléments finis P_2 -Lagrange.

Exercice - 4 Une comparaison

On s'intéresse à présent au problème suivant

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' = 1 & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

La solution exacte de cette équation aux dérivées ordinaires est

$$u(x) = x - \frac{\exp(\frac{x}{\epsilon}) - 1}{\exp(\frac{1}{\epsilon}) - 1}.$$

On généralise l'étude précédente pour obtenir un nouveau problème. On cherche une solution $u \in H_0^1(0, 1)$ du problème

$$\forall v \in H_0^1(0, 1), \quad \epsilon \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 u'v dx = \int_0^1 v dx.$$

On utilise la méthode des éléments finis Lagrange de degré 1 et 2 pour approcher une solution de ce problème.

Q-1 : En utilisant les mêmes notations que dans l'exercice précédent, écrire le problème correspondant.

Q-2 : Écrire une fonction `Matlab` de prototype **function [A,b] = convdiffP1(ϵ , \mathbf{x})** qui assemble la matrice et le second membre de la discrétisation par éléments finis P_1 -Lagrange.

Q-3 : Écrire une fonction `Matlab` de prototype **function [A,b] = convdiffP2(ϵ , \mathbf{x})** qui assemble la matrice et le second membre de la discrétisation par éléments finis P_2 -Lagrange.

Q-4 : Tracer sur un même graphique la solution exacte et la solution discrète sur les deux maillages $\mathbf{x} = 0 : 0.1 : 1$; et $\mathbf{x} = [0, 0.75, 0.875, 0.9375, 0.96875, 0.984375, 1]$;.

Discuter les résultats pour les deux cas, $\epsilon = 0.1$ et $\epsilon = 0.01$.

Comparer les résultats obtenus par les approximations P_1 -Lagrange et P_2 -Lagrange.