TP3 : Interpolation par éléments finis Lagrange

Exercice - 1 *Calculs préliminaires*

On considère un triangle $T = (S_1, S_2, S_3)$, où $S_i, i = 1 \dots 3$ désignent les sommets.

Q-1 : Transformation élémentaire
Donner l'expression de la transformation affine bijective, F_T qui envoie le triangle de référence $\hat{T} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ sur le triangle T. On rappelle que le triangle de référence a pour sommets $\hat{S}_1 = (0,0), \hat{S}_2 = (1,0), \hat{S}_3 = (0,1)$. Donner l'expression de la matrice jacobienne

$$\mathrm{DXF} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix}.$$ Et vérifier que son déterminant $J = \det(\mathrm{DXF})$ est constant.

Q-2 : Fonctions de base locale P_1 Lagrange

1. On désigne par $\mathcal{P}_1(\hat{T})$ l'espace des polynômes de degré total 1 sur le triangle de référence $\hat{T}$. Construire en le justifiant une base $(\hat{\varphi}_i), i = 1 \dots 3$ qui satisfait la propriété $\hat{\varphi}_i(\hat{S}_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbôle de Kronnecker (c'est-à-dire $\delta_{ij} = 1$ si $j = i$ et 0 sinon).
2. Montrer que la base $(\varphi_i), i = 1 \dots 3$ définie par $\varphi_i = \hat{\varphi}_i \circ F_T^{-1}$ est une base de $\mathcal{P}_1(T)$ qui vérifie $\varphi_i(S_j) = \delta_{ij}$.
3. Il vient de la question précédente que si $(\hat{x}, \hat{y})$ sont les coordonnées d'un point générique sur le triangle $\hat{T}$ et si (x, y) sont celles de son image par F_T, on peut écrire sans ambiguité, pour un entier i, l'égalité

   $\hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \varphi_i(x, y)$. Exprimer alors $\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial y}$ en fonction de la matrice DXF et de $\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}$.

Q-3 : Fonctions de base locale P_2 Lagrange.
Reprendre l'exercice précédent avec les espaces $\mathcal{P}_2(\hat{T})$, $\mathcal{P}_2(T)$.

Q-4 : Formules de Quadrature

1. Donner des formules de quadrature $(\hat{\omega}_q, (\hat{x}_q, \hat{y}_q)), q = 1 \dots n_q$ exactes pour les polynômes de degré total 1, 3 et 5 sur le triangle de référence $\hat{T}$.
2. Ecrire une function `matlab` comme ci-dessous, qui prend en entrée un triangle donné par la matrice X_i de ses sommets, l'ordre des fonctions de base (1 ou 2), l'ordre de la quadrature et qui retourne
   (a) la valeur des fonctions de base "chapeau" et de leurs dérivées : $\hat{\varphi}_i, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial y}$, aux points de quadrature $(\hat{\omega}_q, (\hat{x}_q, \hat{y}_q)), q = 1 \dots n_q$.
   (b) la formule de quadrature $(\omega_q, (x_q, y_q)), q = 1 \dots n_q$ dans le triangle courant T (Rappel $\omega_q = \hat{\omega}_q J(\hat{x}_q, \hat{y}_q)$).

script matlab/octave pour l'évaluation des fonctions de base aux points de quadrature

```
%%%%
%% Computes the local basis functions and their derivatives on quadrature vertices
%% INPUTS  :
%%   X array 3 x 2 of  vertices coordinates of the triangle
%%   polyorder : polynomial order
%%   quadorder : quadrature order (the quadrature is exact for quadorder polynomials)
%% OUTPUTS :  PhQ: array nq x nph of value of basis function on quadrature points (quads)
%%                 (nq: number of quadrature points, nph: number of basis functions
```

```
%%            dxPhQ : array nq x nph of derivatives % first variable of basis on quads
%%            dyPhQ : array nq x nph of derivatives % second variable of basis on quads
%%            weight: array nq x 1, weights in the current triangle
%%            XYQ   : array nq x 2, coordinate of quads on the current triangle
%%            (particularly useful when building rhs elementary vector)
%%
%%  COURS D'ÉLÉMENTS FINIS
%%  M2PRO 2007-2008    Lab AN-EDP Univ d'ORSAY
%% (c) Jean-Baptiste Apoung Kamga (July 2007)
%%%%

function [PhQ, dxPhQ, dyPhQ, weight,XYQ]=Lagrangebasis_and_deriv_on_quad(X,polyorder,quadorder)
```

Exercice - 2 *Applications*

Q-1 **: Erreur d'interpolation locale.**

On considère le triangle T dont les coordonnées des sommets sont $X = h \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$. On considère aussi la fonction $u(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$.

1. Pour les valeurs de $h = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{32}$.
   (a) Donner les composantes (U_i^1) de l'interpolé P_1 Lagrange u_h^1 de u sur T.
   Calculer l'erreur $\|u - u_h^1\|_{L^2(T)}, \|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(T)}$.
   (b) Donner les composantes (U_i^2) de l'interpolé P_2 Lagrange u_h^2 de u sur T.
   Calculer l'erreur $\|u - u_h^2\|_{L^2(T)}, \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(T)}$.
2. Représenter graphiquement les courbes
$$h \longmapsto \|u - u_h^1\|_{L^2(T)}, \quad h \longmapsto \|u - u_h^2\|_{L^2(T)},$$
$$h \longmapsto \|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(T)}, \quad h \longmapsto \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(T)},$$
   pour les valeurs de h ci-dessus (voir question 1).
3. En utilisant, les repésentations graphiques, proposer un moyen d'estimer les valeurs des paramètres $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ tels que :
$$\|u - u_h^1\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\alpha_1}, \quad \|u - u_h^2\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\alpha_2},$$
$$\|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\beta_1}, \quad \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\beta_2}.$$
   Où C est une constante ne dépendant que de u.

Q-2 **: Erreur d'interpolation globale.**

On suppose le maillage **quasi-uniforme**. Déduire les valeurs des paramètres $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ tels que :
$$\|u - u_h^1\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha_1}, \quad \|u - u_h^2\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha_2},$$
$$\|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\beta_1}, \quad \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\beta_2}.$$
Où C est une constante ne dépendant que de u.