TP4 : Éléments finis P1-Lagrange sur le triangle

Exercice - 1 *Définitions*

Soit $T = (A_1, A_2, A_3)$ un triangle quelconque du plan réel, de sommets $A_1(x_1, y_1)$, $A_2((x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$.

On notera dorénavant un triangle par la matrice des coordonnées de ses sommets. C'est-à-dire $T = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$

On pose

$$\mathcal{P}_1(T) = \left\{v \text{ définit sur T} : v = a_0 + a_1\, x + a_2\, y; (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

On introduit l'ensemble des trois formes linéaires

$$\Sigma_1(T) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad \text{avec} \quad \sigma_i : \mathcal{P}_1(T) \ni p \mapsto p(A_i) \in \mathbb{R} \qquad \forall i = 1, 2, 3.$$

On a coutume d'introduire quelque fois l'écriture suivante : $\Sigma_1(T) = \{p(A_1), p(A_2), p(A_3)\}$

Q-1 **:** Montrer que le triplet $(T, \mathcal{P}_1(T), \Sigma_1(T))$ est un élément fini.

Exercice - 2 *Fonctions de base*

Q-1 **: Construction directe**

Déterminer les fonctions de base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq 3}$ de cet élément fini. C'est-à-dire les éléments $\varphi_i, i = 1, 2, 3$ de $\mathcal{P}_1(T)$ tels que : $\sigma_i(\varphi_j) = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Dans ce qui suit, $i + 1$ *est le suivant de* i *et* $i + 2$ *est le suivant de* $i + 1$ *dans la numérotation cyclique* $1, 2, 3$.
C'est-à-dire le suivant de 1 *est* 2*, le suivant de* 2 *est* 3 *et le suivant de* 3 *est* 1 .

Q-2 **: Autre construction**

Soit $\overrightarrow{n}_i$ la normale unitaire sortante au triangle T par le côté opposé au sommet A_i.

Q-2-1 **:** Montrer que $\boxed{\overrightarrow{n}_i = -\dfrac{\left(\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\right)^{\perp}}{|\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}|}}$, où pour un vecteur $u = (x, y)$ on a défini $\boxed{u^{\perp} = (-y, x)}$.

On introduit pour $i = 1, 2, 3$, la fonction $g_i(M) = \overrightarrow{A_{i+1}M} \cdot \overrightarrow{n}_i$.

Q-2-2 **:** Montrer qu'elle est polynomiale en x et y de degré total 1, et vérifie :
$g_i(A_{i+1}) = 0,\ g_i(A_{i+2}) = 0,\ g_i(A_i) \neq 0.$

Q-2-3 **:** Déduire l'expression suivante $\boxed{\varphi_i(M) = \dfrac{\overrightarrow{A_{i+1}M} \cdot \overrightarrow{n}_i}{\overrightarrow{A_{i+1}A_i} \cdot \overrightarrow{n}_i} = 1 - \dfrac{\overrightarrow{A_iM} \cdot \overrightarrow{n}_i}{\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \cdot \overrightarrow{n}_i}.}$

Q-2-4 **:** Déduire l'expression suivante du gradient de φ_i : $\boxed{\nabla\varphi_i = \dfrac{\overrightarrow{n}_i}{\overrightarrow{A_{i+1}A_i} \cdot \overrightarrow{n}_i} = \dfrac{\left(\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\right)^{\perp}}{2|T|}.}$

Exercice - 3 *Interpolation*

On définit l'opérateur d'interpolation associé à l'élément fini P_1-Lagrange sur le triangle T par

$$\left\{ \begin{array}{rccl} \pi_T : & \mathcal{C}^0(T) & \longrightarrow & \mathcal{P}_1(T) \\ & v & \longmapsto & \pi_T(v) = v(A_1)\varphi_1 + v(A_2)\varphi_2 + v(A_3)\varphi_3 \end{array} \right.$$

où $(\varphi_i)_{1\leq i\leq 3}$ est la base définie ci-dessus. On souhaite évaluer pour tout $v \in H^m(T), m \geq 2$

$$|v - \pi_T v|_{0,T} \equiv \|v - \pi_T v\|_{L^2(T)} \quad \text{et} \quad |v - \pi_T v|_{1,T} \equiv \|\nabla(v - \pi_T v)\|_{L^2(T)},$$

en fonction de v et des données géométriques du triangle T : son diamètre h_T (correspondant à la taille de sa plus longue arête) et le rayon de son cercle inscrit ρ_T ou de son plus petit angle θ_T, (mesurant ainsi son aplatissement).

On désigne par $\hat{T} = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$, avec $\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ le triangle de référence et $F : \hat{T} \to T$ l'application affine telle que $F(\hat{A}_i) = A_i, i = 1, 2, 3$. On identifie un point $\hat{M}$ de $\hat{T}$ par ses coordonnées $(\hat{x}, \hat{y})$ et le point image M dans T par ses coordonnées (x, y).

Pour toute fonction $v : T \to \mathbb{R}$, on associe $\hat{v} : \hat{T} \to \mathbb{R}$ telle que

$$v \circ F = \hat{v} \qquad \text{et} \qquad \hat{v} \circ F^{-1} = v.$$

Q-1 **: Expression de F**
On rappelle que $F : \hat{T} \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto (x, y) \in T$

Q-1-1 **:** Montrer que F est définie par : $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{x} - \hat{y} & \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$.

En déduire que la matrice jacobienne de la transformation

$$\nabla F = B^T \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \dfrac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \dfrac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

Q-1-2 **:** Montrer qu'on a aussi

$$(\nabla F)^{-T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = B^{-1} = \frac{1}{2|T|} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

Q-1-3 **:** En déduire les majorations suivantes (des normes de Frobenius des matrices B et B^{-1}) :

$$\|B\| \leq \sqrt{2}\, h_T, \qquad \|B^{-1}\| \leq \frac{h_T}{\sqrt{2}|T|}.$$

Q-2 **: Relation de dérivation**
On désigne par $\hat{\nabla}$ l'opérateur gradient par rapport aux variables $\hat{x}, \hat{y}$.

Q-2-1 **:** Exprimer ∇v en fonction de $\hat{\nabla}\hat{v}$.

Q-2-2 **:** Montrer que pour tout $v \in H^1(T)$, on a $\quad |\nabla v|^2 \leq \dfrac{h_T^2}{2|T|^2}|\hat{\nabla}\hat{v}|^2.$

Q-2-3 **:** En déduire que $\|\nabla(v-\pi_T v)\|_{0,T}^2 \leq \dfrac{h_T^2}{|T|^2}\|\hat{\nabla}(\widehat{v-\pi_T v})\|_{0,\hat{T}}^2$

Q-2-4 **:** En évoquant le lemme de **Bramble- Hilbert (1970)** montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\hat{\nabla}(\widehat{v-\pi_T v})\|_{0,\hat{T}} \leq C|\hat{v}|_{2,\hat{T}}.$$

Q-2-5 **:** Montrer que

$$|\hat{v}|_{2,\hat{T}}^2 \leq 9h_T^2\frac{h_T^2}{2|T|}|v|_{2,T}^2.$$

On pourra remarquer que

$$|\hat{v}|_{2,\hat{T}}^2 = \int_{\hat{T}}\left((\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{x}^2})^2 + (\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}})^2 + (\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{y}^2})^2\right)d\hat{x}\,d\hat{y} = \frac{1}{2|T|}\int_T\left((\frac{\partial^2 v}{\partial\hat{x}^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial\hat{y}^2})^2\right)dx\,dy.$$

Et majorer chaque terme sous l'intégrale en fonction de $|D^2 v| = \left|(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2 + (\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y})^2 + (\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2})^2\right|.$

En particulier on peut montrer que $|\dfrac{\partial^2 v}{\partial\hat{x}^2}|^2 \leq 6h_T^4|D^2 v|^2.$

Q-2-6 **:** Conclure qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de T et v tel que

$$\|\nabla(v-\pi_T v)\|_{0,T} \leq C\frac{h_T^2}{2|T|}h_T|v|_{2,T}.$$

Q-3 **: Estimation de** $\dfrac{h_T^2}{2|T|}.$

On désigne par θ_T le plus petit angle du triangle T

Q-3-1 **:** Montrer que $0 < \theta_T \leq \frac{\pi}{3}.$

Q-3-2 **:** Montrer que

$$\frac{\sin(\theta_T)}{2} \leq \frac{2|T|}{h_T^2} \leq \sin(\theta_T).$$

Et conclure.