TP6 : Résolution par éléments finis Lagrange triangulaires de degré 1

Exercice - 1 *Problème modèle*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère le problème :

Chercher une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rccc} -\alpha\Delta u + \beta u = & f & \text{dans} & \Omega, \\ \nabla u \cdot n = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

Q-1 : Montrer que la formulation variationnelle de ce problème est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{2}$$

où

$$a(u,v) = \alpha \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx + \beta \int_\Omega u\ v\ dx, \quad l(v) = \int_\Omega f v\ dx. \tag{3}$$

Q-2 : Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2).

Exercice - 2 *Discrétisation par éléments finis P1-Lagrange*

Pour discrétiser le problème on introduit un maillage triangulaire $\tau_h = \{T_k\}_{1 \le k \le Nma}$ de Ω, ainsi que l'espace

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad v_h|_{T_k} \in P_1(T_k), \forall T_k \in \tau_h\}$$

Le problème discret devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \quad a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \tag{4}$$

Q-1 : Montrer que V_h est un sous espace vectoriel de V de dimension finie.

Q-2 : Montrer que le problème (4) admet une unique solution.

Exercice - 3 *Calculs élémentaires*

Soit $T = (A_1, A_2, A_3)$ un triangle quelconque de τ_h, de sommets $A_1(x_1, y_1)$, $A_2((x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. On désigne le triangle par la matrice des coordonnées de ses sommets, $X_k = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$

Q-1 **:** Rappeler l'expression des fonctions de base de l'élément fini sur T définissant l'espace V_h.
(*On pourra se servir de la fiche de TP4.*)

Q-2 **:** Calculer alors la matrice élémentaire A_k et le vecteur élémentaire F_k associé à la maille T :

$$A_k(i,j) = \int_T (\alpha \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j + \beta\phi_i\, \phi_j)\ dx, \quad i,j = 1,2,3.$$

$$F_k(i) = \int_T f\phi_i dx, \quad i = 1,2,3.$$

(On pourra utiliser la formule de quadrature approchée suivante :)

$$\int_T g(x)\, dx \approx \frac{|T|}{3}\left(g(M_1) + g(M_2) + g(M_3)\right)$$

où $M_i, i = 1,2,3$ sont les milieux des cotés du triangle T et $|T|$ son aire.

Q-3 **:** Programmer les calculs précédents à travers une fonction `Matlab` de prototype

```
[Ak, Fk] = MatVectElementaire(Xk,alpha,beta)
```

Où la fonction f est fournie par un fichier `f.m`.

Remarquer que pour certaine valeurs de α, β, on obtient la matrice élémentaire de **masse** *et du* **Laplacien***, dont on pourra se servir pour calculer les erreurs en norme L^2 et en semi-norme H^1.*

Exercice - 4 *Assemblage de la matrice globale et du second membre global*

On suppose qu'on dispose du maillage lu et stocké dans le tableau `Mesh` comme décrit dans le TP5.

Q-1 **:** Pour cet espace éléments finis, a quoi correspond la table **l2g** des degrés de liberté ?

Q-2 **:** Écrire une fonction `Matlab` de prototype

```
function [A,F] = Assemble(Mesh, alpha, beta)
```

qui assemble la matrice et le second membre du problème discrétisé par éléments finis P1-Lagrange.

Exercice - 5 *Validation*

Pour cet exercice le maillage est donné par le fichier `carree.msh` qui est un maillage du domaine $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, donné au format .msh

Q-1 **:** Écrire une script qui réalise les fonctionalités suivantes :

- Lecture du maillage et sa représente graphiquement
- Calcul de la matrice A et du second membre F
- Résolution le système linéaire $A\,U = F$
- Représentation graphique la solution du problème discret.

(*on prendra diverses valeurs de* α, β *et de la fonction* f.)

Exercice - 6 *Extension à un problème de Dirichlet*

On considère cette fois le problème

$$\begin{cases} -\alpha\Delta u + \beta u = & f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = & g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où g est une fonction donnée.

Q-1 **:** Reprendre pour ce problème, les questions précédentes, jusqu'à l'assemblage de la matrice.

Q-2 **:** Écrire ensuite une fonction de prototype

```
function [A,F] = ConditionLimite(Mesh, A, F, Label)
```

qui modifie les matrice et vecteur construits, pour prendre en compte la condition aux limites de Dirichlet sur la portion de la frontière identifiée par son numéro logique **`Label.`**

Q-3 **:** On se propose de valider le code.

Pour cela on se donne une solution analytique du problème (5). On prend ici $\alpha = 1, \beta = 0$.

Q-3**-**1 **:** Donner l'expression des fonctions f et g pour que la solution exacte soit

$$u(x, y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y).$$

Q-3-2 **:** Écrire un script qui

- résout le problème (5) par éléments finis P1-Lagrange
- représente la solution calculée et l'interpolée P1-Lagrange de la solution exacte
- affiche les erreurs en norme L^2 et semi-norme H^1 entre la solution de exacte et la solution calculée.