

**TP7 : Equation de convection-diffusion 2D par éléments finis Lagrange  
triangulaires de degré 1**

Considérons un récipient  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ , rempli d’un fluide en mouvement, le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  défini en chaque point  $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$  est supposé dans  $(L^2(\Omega))^2$  et vérifie

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0.$$

A l’instant  $t = 0$ , on ajoute dans  $\Omega$  du sel avec la concentration  $u(t = 0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$ . L’équation de conservation de la masse pour le sel s’écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mu$  est le coefficient de diffusion.

---

**Exercice - 1 Formulation Variationnelle**

---

**Q-1** : Montrer que le problème variationnel associé à (1) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in C^0([0; T]; V) \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, \mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + a(u, w) = 0 \quad \forall w \in V \quad \forall t \in ]0, T[. \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$a(u, w) = \int_{\Omega} (\mu \nabla u \cdot \nabla w - u(\mathbf{v} \cdot \nabla w)) dx, \quad V = H_0^1(\Omega). \quad (3)$$

**Q-2** : Montrer que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $V$ .

On admettra dans la suite que le problème (2) admet une solution

$$u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

**Q-3** : Montrer que

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} < \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \in ]0, T]. \quad (4)$$

---

**Exercice - 2 Discrétisation**

---

On commence par une discrétisation en espace du problème variationnelle (2). On se donne un maillage  $\tau_h = \{T_k\}_{1 \leq k \leq N_{ma}}$  de  $\Omega$  formé d'éléments triangulaires. On introduit l'espace éléments finis P1-Lagrange.

$$X_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ tel que } v_h|_{T_k} \in P_1(T_k), \forall T_k \in \tau_h\}.$$

et son sous-espace  $V_h = X_h \cap H_0^1(\Omega)$ .

On désigne par  $u_h(t, \cdot)$ , la fonction approchée de  $u$  à l'instant  $t$  dans l'espace  $V_h$ .

On désigne par  $\mathcal{B} = ((\phi_i)_{i=1, \dots, N})$  une base de  $V_h$ .

**Q-1** : Établir une relation entre  $N$ , le nombre  $N_{so}$  de sommet du maillage et le nombre  $N_{be}$  de sommets sur la frontière du maillage.

**Q-2** : En désignant par  $U(t)$  le vecteur des composantes de  $u_h(t, \cdot)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , Montrer que le problème semi-discrétisé en espace se met sous la forme

$$\begin{cases} M \frac{dU(t)}{dt} + A U(t) = 0 & \text{dans } ]0, T[, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (5)$$

où  $U_0$  est le vecteur des composantes de  $u_0$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Expliciter  $M$  et  $A$ .

**Q-3** : Semi-discrétisation en temps du problème (5), par le  $\theta$ -schéma

On introduit un pas de temps  $\delta_t > 0$ , et on recouvre l'intervalle  $[0, T]$  d'intervalles de longueur  $\delta_t$ . Ceci génère les instants

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T \quad \text{avec} \quad t_n = t_0 + n\delta_t$$

On désigne par  $U^n$  la valeur approchée de  $U(t_n)$  à l'instant  $t_n$ . En particulier  $U^0 = U_0$ .

On souhaiterait approcher  $U^{n+1}$  en partant de  $U^n$ .

**Q-3-1** : En intégrant l'équation (5) de  $t_n$  à  $t_{n+1}$ , montrer que

$$M(U(t_{n+1}) - U(t_n)) + A \int_{t_n}^{t_{n+1}} U(s) ds = 0 \quad (6)$$

**Q-3-2** : Soit alors  $0 \leq \theta \leq 1$  un nombre réel. On pose  $t_\theta = (1-\theta)t_n + \theta t_{n+1}$ . Effectuer la décomposition suivante :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} U(s) ds = \int_{t_n}^{t_\theta} U(s) ds + \int_{t_\theta}^{t_{n+1}} U(s) ds,$$

puis approcher la première intégrale respectivement la deuxième intégrale à droite de l'égalité par une formule des rectangles à gauche respectivement à droite.

Porter ces expressions dans (6) et déduire le schéma numérique suivant pour la résolution de (5)

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\delta_t} M + (1-\theta)A\right) U^{n+1} = \left(\frac{1}{\delta_t} M - \theta A\right) U^n & n = 0, \dots, N \\ U^0 = U_0, \end{cases} \quad (7)$$

**Q-3-3** : A quoi correspond ces schémas pour les valeurs suivantes du paramètre  $\theta : 0, 1, \frac{1}{2}$ .

**Q-4** : Stabilité du schéma

**Q-4-1** : Pour  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ , montrer que le schéma numérique vérifie la propriété (4).

**Q-4-2** : Qu'en est-il de la condition (4) lorsque  $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ .

(On pourra montrer qu'une condition suffisante est :  $\delta_t < \frac{2}{(2\theta - 1)\lambda_{\max}}$ ,  
où  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $M^{-1}A$ .)

---

**Exercice - 3** Implémentation

---

**Q-1** : Proposer un algorithme implémentant le schéma totalement discret précédent. Mettez en évidence une difficulté liée notamment à la prise en compte des conditions aux limites.

On se propose de décrire ici une approche permettant une procédure moins contraignante. La démarche consiste à permuter l'ordre des semi-discrétisations précédentes. Ainsi, on suivra les étapes suivantes :

1. On commence par une semi-discrétisation temporelle.
2. On effectue ensuite une semi-discrétisation spatiale.

Cette approche permet de figer le temps offrant ainsi l'avantage de se restreindre à la résolution d'un problème stationnaire à chaque itération en temps.

**Q-2** : Appliquer la semi-discrétisation temporelle (par le  $\theta$ -schéma) au problème (1), et montrer que le passage de  $u^n$  à  $u^{n+1}$  se ramène en la résolution d'un problème du type

$$\begin{cases} \alpha \left( -\nabla \cdot (\mu \nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) \right) + \beta u = f(v) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

où l'on a posé

$$f(v) = -\gamma \left( -\nabla \cdot (\mu \nabla v) + \nabla \cdot (\mathbf{v}v) \right) + \beta v.$$

On exprimera les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  en fonction du pas  $\delta_t$  de discrétisation en temps et du paramètre  $\theta$  du schéma.

**Q-3** : Montrer que la formulation variationnelle de (8) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V (= H_0^1(\Omega)) \text{ tel que} \\ a_{\alpha,\beta}(u, w) = l_{\gamma,\beta,v}(w) \quad \forall w \in V. \end{cases} \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{\alpha,\beta}(u, w) &= \int_{\Omega} \left( \alpha \mu \nabla u \cdot \nabla w - \alpha u (\mathbf{v} \cdot \nabla w) + \beta u w \right) dx, \\ l_{\gamma,\beta,v}(w) &= a_{-\gamma,\beta}(v, w). \end{aligned}$$

**Q-4** : On se propose de discrétiser le problème (9) par une méthode d'éléments finis P1-Lagrange. On introduit pour cela un maillage triangulaire  $\tau_h = \{T_k\}_{1 \leq k \leq N_{ma}}$  de  $\Omega$ , ainsi que l'espace

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ tel que } v_h|_{T_k} \in P_1(T_k), \forall T_k \in \tau_h\}.$$

On sait que la construction des matrices et vecteurs peuvent se faire directement dans cet espace, sous réserve de les modifier ultérieurement pour prendre en compte les conditions aux limites.

En désignant par  $U$  resp.  $Z$  le vecteur des composantes de  $u_h$  resp.  $v_h$  dans une base de  $V_h$ , le problème discret pourra alors se mettre sous la forme

$$A_{\alpha,\beta}U = B_{\gamma,\beta}Z. \quad (10)$$

**Q-4-1** : Soit  $T_k = (A_1, A_2, A_3)$  un triangle quelconque de  $\tau_h$ , de sommets  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$ . On identifie ce triangle par les coordonnées de ses sommets,  $X_k = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$

Définir les matrices élémentaires  $A_k, B_k$  relatives à cet élément, nécessaires pour la construction de  $A_{\alpha,\beta}, B_{\gamma,\beta}$ .

Implémenter la construction de ces matrices sous `Matlab` à travers une fonction de prototype

**[Ak, Bk] = MatElementaires(Xk, alpha, beta, gamma)**

**Q-4-2** : Écrire une fonction `Matlab` de prototype

**function [A,B] = Assemble(Mesh, alpha, beta, gamma)**

qui construit la matrice globale par assemblage des matrices élémentaire précédentes.

**Q-4-3** : Écrire une fonction de prototype

**function [A,F] = ConditionLimite(Mesh, A, F, Label)**

qui modifie une matrice  $A$  et un vecteur  $F$ , pour prendre en compte la condition aux limites de Dirichlet sur la portion de la frontière identifiée par son numéro logique **Label**.

(On pourra utiliser le script du TP précédent).

**Q-4-4** : Au vue des questions précédentes, proposer un algorithme pour résoudre le problème (1).

**Q-4-5** : Implémenter cet algorithme à travers un script `Matlab`.

#### Exercice - 4 *Validations*

On considère, ici

$$\mathbf{v}(x, y) = \min \left\{ \cos \left( \frac{\pi x^2}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi y^2}{2} \right), \frac{1}{2} \right\} \times (y, -x).$$

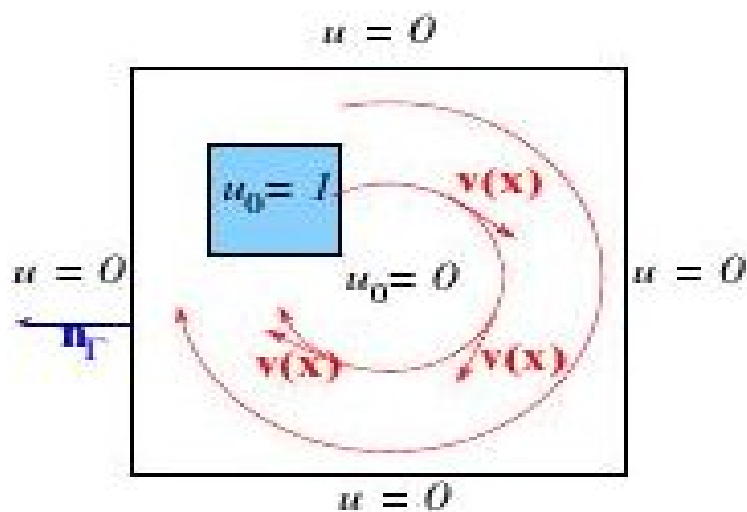


FIG. 1 – géométrie du problème

**Q-1** : En effectuant quelques tests, assurez-vous que le schéma n'est pas stable (apparition des oscillations)

On note  $Pe_T$  le nombre de Péclet sur le triangle  $T$ ,  $Pe_T = \frac{\|\mathbf{v}\|_{l_2} h_T}{6\mu}$ . On sait alors que si la solution exacte n'est pas lisse, pour  $Pe_T > 1$ , la solution discrète présente d'importantes oscillations. Pour stabiliser, on ajoute à la formulation faible une perturbation

$$+ \sum_T \tau_T \int_T (\mathbf{v} \cdot \nabla u)(\mathbf{v} \cdot \nabla w) dx,$$

où la somme est prise sur chaque triangle  $T$  de la triangulation. Le coefficient  $\tau_T$  se calcule en fonction du nombre de Péclet local, de la taille de maille locale  $h_T$ , de la norme euclidienne de la vitesse locale et du coefficient de diffusion  $\mu$ ,

$$\tau_T = \begin{cases} \frac{Pe_T h_T}{2\|\mathbf{v}\|_{l_2}} & \text{si } Pe_T < 1, \\ \frac{h_T}{2\|\mathbf{v}\|_{l_2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q-2** : Modifier les matrices élémentaires précédents pour prendre en compte cette stabilisation.

**Q-3** : Tester les schémas d'avancement en temps implicites et explicites, comparer les résultats. Discuter la condition de stabilité, l'ordre de l'erreur en  $h = \max_{T \in \tau_h} h_T$  et  $\delta_t$  le pas de temps.

**Q-4** : Vérifier qu'à chaque instant  $t$  la masse totale du sel reste constante, c'est-à-dire que les schémas numériques sont globalement conservatifs. Justifiez ce résultat en vous appuyant sur le problème variationnel approché ayant conduit à (5).