Partiels - Jeudi 26 Mars 2009 - Durée : 3 heures

La plupart des questions sont indépendantes les unes des autres. Si vous ne pouvez répondre à une d'entre elles, vous pouvez passer à la question suivante en supposant admis les résultats précédents. Les notes de cours ainsi que les scripts de TP sont autorisés.

Les résultats des questions théoriques devront être fournis sur papier et pour les résultats des questions numériques, on rendra un répertoire contenant tous les listings des programmes (le plus commenté possible) avec un script permettant de les lancer avec les bons paramètres. Les figures pourront également être imprimés sur papier.

On considère le problème suivant de diffusion-transport mono-dimensionnel :

(1)
$$\left\{\begin{array}{rcll} -\varepsilon u'' + \beta u' & = & 0 & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) & = & 0, & \\ u(1) & = & 1, & \end{array}\right.$$

avec ε et β des constantes positives.

Exercice - 1 *Formulation variationnelle*

On admet que la solution de (1) est dans $H^1(0,1) = \{v \in L^2(0,1);\ v' \in L^2(0,1)\}$.

Soit u_g la fonction définie par $u_g(x) = x, \quad \forall x \in [0,1]$. On introduit la fonction $\bar{u} = u - u_g$.

Q-1 **: Problème variationnel vérifié par** $\bar{u}$

Q-1**-**1 **:** Montrer que $u_g \in H^1(0,1)$ et vérifie les conditions aux limites du problème (1).

Q-1**-**2 **:** Montrer que la formulation variationnelle du problème définissant $\bar{u}$ est

(2)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Chercher } \bar{u} \in H^1_0(0,1) \text{ tel que,} \\ \varepsilon \int_0^1 \bar{u}'v'\,dx + \beta \int_0^1 \bar{u}'v\,dx = -\int_0^1 \beta v\,dx, \forall v \in H^1_0(0,1), \end{array}\right.$$

où $\quad H^1_0(0,1) = \{v \in H^1(0,1);\ v(0) = v(1) = 0\}$.

Q-2 **: Existence et unicité de** $\bar{u}$

Les normes $|v'|_{L^2(0,1)}$ et $\|v\|_{H^1(0,1)} = \sqrt{|v|^2_{L^2(0,1)} + |v'|^2_{L^2(0,1)}}$ sont (admises) équivalentes sur $H^1_0(0,1)$.

Q-2**-**1 **:** Montrer que la forme bilinéaire associée au problème (2) est continue et coercive.
Q-2**-**2 **:** Montrer que la forme linéaire associée au problème (2) est continue.
Q-2**-**3 **:** Déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème (2).

Q-3 **: Existence et unicité de la solution faible de (1)**

Déduire de ce qui précède qu'il existe une unique $u \in H^1(0,1)$ solution du problème (1) et vérifiant

(3)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H^1(0,1) \text{ avec } u(0) = 0, u(1) = 1 \text{ tel que,} \\ \varepsilon \int_0^1 u'v'\,dx + \beta \int_0^1 u'v\,dx = 0, \forall v \in H^1_0(0,1), \end{array}\right.$$

Exercice - 2 *Solution analytique*

Q-1 **:** Montrer que la solution exacte du problème (1) est $u(x) = \dfrac{\exp(\frac{\beta}{\varepsilon}x) - 1}{\exp(\frac{\beta}{\varepsilon}) - 1}$.

Q-2 **:** Montrer que $\exp(y) - 1 \approx \begin{cases} y & \text{si } \ 0 \leq y \ll 1, \\ \exp(y) & \text{si } \ y \gg 1. \end{cases}$,
où le signe $\ll$ signifie très petit et le signe $\gg$ signifie très grand.

En déduire que $u(x) \approx \begin{cases} x & \text{si } \ \frac{\beta}{\varepsilon} \ll 1, \\ \exp(-\dfrac{\beta}{\varepsilon}(1-x)) & \text{si } \ \frac{\beta}{\varepsilon} \gg 1. \end{cases}$

Q-3 **:** Représenter graphiquement la solution exacte du problème (1), pour $\beta = 1$ et $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ sur un maillage uniforme de $[0, 1]$ de pas $h = 0.1$. Justifier alors le recours à cette approximation de la solution lorsque $\frac{\beta}{\varepsilon} \gg 1$.

Exercice - 3 *Discrétisation par éléments finis Lagrange P_r-Lagrange ($r = 1, 2$)*

On considère un maillage $0 = x_1 < \ldots < x_{N_{so}-1} < x_{N_{so}} = 1$, du domaine $]0, 1[$.
On introduit X_h^r le sous-espace de $H^1(\Omega)$ et X_{0h}^r son sous-espace, définis par

$$\begin{aligned} X_h^r &= \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) \text{ tel que } u_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_r, \forall\, 1 \leq i \leq N_{so} - 1 \right\}, \\ X_{0h}^r &= \left\{ v_h \in X_h^r \text{ tel que } v_h(0) = v_h(1) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

où $\mathbb{P}_r$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à r.

Le problème discret se met alors sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{Chercher } u_h \in X_h^r \text{ avec } u_h(0) = 0, u_h(1) = 1 \text{ tel que,} \\ \varepsilon \int_0^1 u_h' v_h' \, dx + \beta \int_0^1 u_h' v_h \, dx = 0, \forall v_h \in X_{0h}^r. \end{cases}$$

Q-1 **:** Pourquoi peut-on affirmer que ce problème admet une unique solution ?

Q-2 **:** Écrire un script `Matlab` résolvant le problème (4) par éléments finis P1 et P2.

Représenter sur un même graphique les solutions P1, P2, l'interpolé P1 de la solution P2 ainsi que la solution exacte pour $\beta = 1, \varepsilon = 0.01$ et un maillage uniforme de pas $h = 0.1$.

Q-3 **:** Pour $\beta = 1, h = 0.1, \varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$, représenter en fonction de ε la courbe d'erreur en norme L^2 entre la solution exacte et la solution approchée.

Q-4 **:** Commenter les résultats obtenus, en mettant en évidence les oscillations numériques, autour de 0, de la solution calculée.

Exercice - 4 *Mise en évidence des oscillations et essaie de correction.*

Q-1 : Origine des oscillations. (*On se restreint ici à l'élément fini P_1-Lagrange*)

On suppose aussi le maillage uniforme de pas h et de sommets :

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N = 1,$$

ce qui correspond à une numérotation des sommets à partir de 0.

On introduit l'espace $X_h^1 = \{v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) \text{ tel que } u_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall\, 0 \leq i \leq N-1\}$, dont une base est constituée des fonctions $(\phi_i)_{0\leq i\leq N}$, définies par $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$. ($\delta_{i,i} = 1$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $j \neq i$).

Q-1-1 : Donner les expressions des $\phi_i, i = 0, \ldots N$ ainsi que celles de leurs dérivées premières.

Q-1-2 : Montrer que la solution approchée s'écrit

$$u_h = u_0\phi_0 + u_1\phi_1 + \ldots u_{N-1}\phi_{N-1} + u_N\phi_N, \quad \text{avec} \quad u_0 = 0, u_N = 1.$$

Q-1-3 : Montrer que le problème discret se met sous la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} \text{Chercher } u = (u_0, \ldots, u_N)^t \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tel que ,} \\ (P_e - 1)u_{i+1} + 2u_i - (P_e + 1)u_{i-1} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N-1, \\ u_0 = 0, \quad u_N = 1. \end{cases}$$

où $P_e = \frac{\beta h}{2\varepsilon}$ est une grandeur appelée nombre de Péclet local.

On se propose de résoudre explicitement l'équation (5). On remarque que c'est une équation récurrente linéaire du second ordre, dont on peut chercher la solution sous la forme $u_i = \rho^i$.

1. Montrer alors que ρ vérifie l'équation *caractéristique* $(P_e - 1)\rho^2 + 2\rho - (P_e + 1) = 0$.
2. Trouver les racines ρ_1 et ρ_2 de cette équation et conclure qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $u_i = C_1\rho_1^i + C_2\rho_2^i, \forall 0 \leq i \leq N$.
3. Déterminer les constantes C_1, C_2, en utilisant la condition aux limites $u_0 = 0$, $u_N = 1$, et conclure que la solution de (5) est $u_i = \dfrac{1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^i}{1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^N}, \quad i = 0, \ldots, N.$

Q-1-4 : Montrer que pour $P_e > 1$, certains composantes u_i de la solution de l'équation (5) son négatives, c'est-dire que la solution par éléments finis P_1-Lagrange présente des oscillations numériques (autour de 0).

Q-1-5 : Montrer qu'il n'y a pas d'oscillation numérique si $P_e < 1$. Quelle est dans ce cas, la relation entre h, β et ε ? Quelle serait une bonne valeur de h pour $\beta = 1, \varepsilon = 0.01$?

Q-2 : Correction des oscillations.

On choisit de remplacer la viscosité physique ε par une viscosité artificielle $\varepsilon_h = \varepsilon + \theta_h$, où θ_h est une fonction du pas du maillage h et de β, tendant vers zéro lorsque h tend vers zéro.

Q-2-1 : Montrer que dans ce cas le nombre de Péclet local devient $P_e = \frac{\beta h}{2\varepsilon + 2\theta_h}$. En déduire un critère de choix de θ_h pour que $P_e < 1$.

Q-2-2 : Représenter sur un même graphique les solutions P1, P2, l'interpolé P1 de la solution P2 ainsi que la solution exacte pour $\beta = 1, \varepsilon = 0.01, \theta_h = \frac{\beta h}{2}$.

Q-2-3 : Comparer les résultats ainsi obtenus à ceux de l' Exercice-3.