Partiels - Lundi 16 Novembre 2009 - Durée : 3 heures

Les notes de cours ainsi que les scripts de TP sont autorisés.

Les résultats des questions théoriques devront être fournis sur papier et pour les résultats des questions numériques, on rendra un répertoire contenant tous les listings des programmes. Les figures pourront également être imprimées sur papier.

On s'intéresse à la résolution dans $\mathbb{R}^n$ d'un système

(1) $$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad \text{où} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

On posera $a = [a_1, \dots, a_n]^T$, $\quad b = [b_1, \dots, b_n]^T$, $\quad c = [c_1, \dots, c_n]^T$. [$(\cdot)^T$ est l'opérateur transposé].

Exercice - 1 *Cas où A es tridiagonale ($c_1 = 0, b_n = 0$). Stockage et résolution*

Dans tout cet exercice, on considère le cas où $c_1 = 0, b_n = 0$. La matrice A est alors dite **tridiagonale**.

Q-1 **:** **On suppose :** $a_i = 2, \forall i = 1, \dots, n$**, et** $c_i = -1, \forall i = 2, \dots, n$, **et** $b_i = -1, \forall i = 1, \dots, n-1$

On introduit alors les n vecteurs $(d^{(k)})_{k=1}^n)$ de $\mathbb{R}^n$

$$d_j^{(k)} = j \quad \text{pour} \quad 1 \le j \le k \qquad \text{et} \quad d_j^{(k)} = 0 \quad \text{pour} \quad k < j \le n.$$

Q-1-1 **:** Calculer les produits scalaires $(Ad^{(k)}, d^{(k')})$ pour $1 \le k, k' \le n$.

Q-1-2 **:** En déduire que les $(d^{(k)})_{k=1}^n)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Q-1-3 **:** On écrit la solution du système $Ax = f$ dans la base des $(d^{(k)})_{k=1}^n)$:

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k d^{(k)}.$$

Calculer les coefficients α_k en fonction de f et des $(d^{(k)})_{k=1}^n)$. Commenter.

Q-1-4 **:** On écrit cette fois x et f dans la base canonique $(e_k)_{k=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, \qquad f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$$

Exprimer x_k en fonction des f_k. En déduire l'expression explicite suivante de la matrice A^{-1} :

$$(A^{-1})_{k,j} = j\frac{n+1-k}{n+1} \quad \text{pour} \quad j \le k.$$

Q-1-5 **:** Est-il plus économique (en nombre d'opérations, i.e. multiplications et divisions) de résoudre le système linéaire $Ax = f$ ou de calculer x par la formule $x = A^{-1}$? On suppose A^{-1} connu, c'est-à-dire que les coefficients $(A^{-1})_{k,j}$ sont déjà calculés.

Q-2 **:** $\boxed{\textbf{Retour au cas où } a_i, b_i, c_i, i = 1\ldots,n \textbf{ sont quelconques (Décomposition LU)}}$

On pose

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_2 & d_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & l_{n-1} & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_n & d_n \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & r_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q-2-1 **:** Montrer que $LU = A$ si et seulement si

$$\begin{array}{lll} & d_1 = a_1, & d_1\, r_1 = b_1 \\ l_k = c_k, & d_k = l_k\, r_{k-1} + a_k, & d_k\, r_k = b_k \quad k = 2,\ldots,n-1, \\ l_n = c_n, & d_n = l_n\, r_{n-1} + a_n. & \end{array}$$

Q-2-2 **:** En résolvant ces équations, proposer un algorithme de décomposition LU de la matrice A. Justifier que l'on peut stocker la matrice A ainsi que sa factorisation LU avec seulement 3 vecteurs, chacun de longueur au plus n. Fournir alors une fonction `Matlab`

```
[lA,dA,rA] = decompLUTridiag(c,a,b)
```

qui effectue la décomposition LU de la matrice tridiagonale A dont les diagonales principales sont stockées dans c, a, b comme décrit précédemment et lA, dA, rA sont respectivement les diagonales inférieure, principale et supérieure de sa décomposition LU.

Q-3 **:** Proposer un algorithme de résolution du système $LUx = f$ et fournir une fonction `Matlab`

```
[x] = descenteRemonteeTridiag(lA,dA,rA, f)
```

qui détermine la solution de x du système tridiagonal $Ax = f$ dont la factorisation LU de la matrice A est stockée dans lA, dA, rA comme décrit à la question précédente.

Exercice - 2 *Cas quelconque (A tridiagonale de structure circulante)*

Dans cette question on se place dans le cas général ($c_1 \neq 0, b_n \neq 0$)

Q-1 **:** On se donne deux réels α et γ. Montrer que l'on peut déterminer deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$u = [\frac{1}{\alpha}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\gamma}]^T \quad \text{et} \quad v = [v_1, 0, \ldots, 0, v_n]^T$$

tels quel

$$A = B + uv^T, \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n & \tilde{a}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

On exprimera $\tilde{a}_1, \tilde{a}_n, v_1, v_n$ en fonction de $a_1, a_n, c_1, b_n, \alpha, \gamma$.

Q-2 **:** Un choix quelconque de α et γ est-il possible ?

Pour un choix de α et β, pour résoudre $Ax = f$, on écrit $(I + B^{-1}uv^T)x = B^{-1}f$ ou encore $(I + zv^T)x = B^{-1}f$ où $z = B^{-1}u$. Il ne reste plus qu'à chercher une expression de $(I + zv^T)^{-1}$.

Q-3 **:** Soit $M \in \mathcal{M}_{k,k}$ une matrice inversible, $Z, V \in \mathcal{M}_{n,k}$ des matrices données, montrer que

$$(I + ZV^T)(I - ZM^{-1}V^T) = I + Z\left(M - (I_k + V^TZ)\right)M^{-1}V^T$$

où I_k est la matrice identité de $\mathcal{M}_{k,k}$.

En déduire une expression de M pour que $(I + ZV^T)^{-1} = I - ZM^{-1}V^T$

Q-4 **:** En déduire que la solution de $Ax = f$ est

$$x = \left(I - B^{-1}u(1 + v^TB^{-1}u)^{-1}v^T\right)B^{-1}f$$

Q-5 **:** Proposer un déroulement de calculs pour déterminer x à l'aide de la formule précédente, sans calculer explicitement la matrice $(I - B^{-1}u(1 + v^TB^{-1}u)^{-1}v^T)B^{-1}$

Q-6 **:** Écrire une fonction `Matlab`

```
[x] = inverseCyclic(lB, dB, rB, alpha, beta, f )
```

qui calcule la solution x de $Ax = f$ où lB, dB, rB sont respectivement les diagonales inférieure , principale et supérieure de la factorisation LU de la matrice B issue de la décomposition de A sous la forme indiquée à la question 1.

Exercice - 3 *Application à une équation aux dérivées partielles*

On considère l'équation

$$\text{(3)}\qquad \left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &=& 0 & \text{dans }]0,T[\times]0,1[, \\ u(t,0) &=& u(t,1), & \text{dans } [0,T], \\ u(0,x) &=& u_0(x), & \text{dans } [0,1] \end{array}\right.$$

avec ε et β des constantes positives.

On se propose de discrétiser cette équation par une méthode de différences finies en espace (semi-discrétisation spatiale) et en temps (semi-discrétisation temporelle).

Q-1 **:** **Semi-discrétisation spatiale.** On commence par recouvrir $[0,1]$ d'une grille de pas $h = \frac{1}{n-1}$. Ceci génère les noeuds

$$\mathcal{X}_n = \{x_i, x_i = (i-1)\times h, i \in \{1,\dots,n\}\}.$$

On écrit ensuite que l'équation est vérifiée en chaque noeud interne, soit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x_i) - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x_i) + \beta\frac{\partial u}{\partial x}u(t,x_i) = 0, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \forall 0 < t < T.$$

On remplace ensuite les opérateurs différentiels par des différences divisées.

Q-1-1 **:** Montrer que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x_i) = \frac{u(t,x_{i-1}) - 2u(t,x_i) + u(t,x_{i+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_i) = \frac{u(t,x_i) - u(t,x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Q-1-2 **:** On pose pour tout $t \in [0,T]$, $U_i(t)$ la valeur approchée de $u(t,x_i)$. Montrer que le problème semi-discret spatial approché s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = 0 \quad \forall 0 < t < 1, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4}$$

où A est une matrice dont la structure est celle donnée en (1).

Q-2 **: Semi-discrétisation temporelle.** Pour achever la discrétisation, on remplace le problème (4) par un problème discret approché. Pour cela on introduit un maillage de $[0,T]$. On découpe $[0,T]$ en m intervalles de pas $\delta t = \frac{T}{m}$, ce qui génère les points $\mathcal{T}_m = \{t_k = k \times \delta t, k \in \{0,\dots m\}\}$. Plusieurs choix sont possibles, on opte pour le schéma implicite : on écrit que le problème (4) est satisfait en tous les points $t_{k+1} = t_k + \delta t$, soit

$$\frac{dU(t_{k+1})}{dt} + AU(t_{k+1}) = 0.$$

Q-2-1 **:** En utilisant les développements limités de $h(t+\delta t)$ montrer que

$$h'(t) = \frac{h(t+\delta t) - h(t)}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t) \quad \text{et donc} \quad \frac{dU(t_{k+1})}{dt} = \frac{U(t_{k+1}) - U(t_k)}{\delta t} + \mathcal{O}(\delta t).$$

Q-2-2 **:** Si on désigne par U^k la valeur approchée de $U(t_k)$, montrer que le problème discret s'écrit

$$\begin{cases} U^0 = U_0, \\ G\,U^{k+1} = U^k, \quad \forall\, 0 \le k \le m-1. \end{cases} \tag{5}$$

Avec G définie comme en (1) avec $\begin{cases} c_i &= -\delta t \frac{\varepsilon}{h^2} - \delta t \frac{\beta}{h} \\ a_i &= 1 + \delta t \frac{2\varepsilon}{h^2} + \delta t \frac{\beta}{h} \\ b_i &= -\delta t \frac{\varepsilon}{h^2} \end{cases} \quad \forall i = 1,\dots,n$

Q-3 **: Mise en oeuvre.**

Proposer un algorithme pour résoudre l'équation de convection-diffusion faisant usage des développements des exercices précédents.

Q-3-1 **:** Écrire une fonction MATLAB de prototype

`function [G,U,X]=assembleConvDiff(n,m,epsi,beta,T)`

où n et m sont respectivement les paramètres de discrétisation spatiale et temporelle et **`epsi, beta`** les coefficients de diffusion (ε) et de convection (β), T le temps final, et qui retourne le vecteur X des points du maillage et le vecteur U contenant les valeurs de la donnée initiale u_0, aux points X et la matrice G. On peut envisager de stoker la matrice G dans les vecteurs a, b, c comme décrit précédemment.

Q-3-2 **:** Écrire une fonction MATLAB de prototype

`function [V] = miseAjour(G,U)`,

qui retourne à une itération k, le vecteur V valeur de U^{k+1} lorsque $U = U^k$. On essaiera de faire usage des développements des questions précédentes.

Q-3-3 **:** On prend $\varepsilon = 1e-5, \beta = 0.1,\ T = 10,\ n = 200,\ m = 10000,\ u_0(x) = e^{-1000(x-0.5)^2}$. Représenter graphiquement la solution U^1 et U^m.