Maîtrise de Mathématiques Fondamentales et Applications
Grands Systèmes Linéaires
feuille de TP 10

17 décembre 2009

Exercice - 1 *Transformée de Fourrier discrète (DFT) et rapide (FFT)*

1- Transformée de Fourrier discrète
a- Ecrire une fonction MATLAB de prototype `[g]=mondft(f)` qui calcule la transformée de Fourrier discrète du vecteur $f \in \mathbb{C}^N$, selon la formule

$$g_l = \sum_{k=1}^{N} \exp \frac{-2i\pi(k-1)(l-1)}{N} f_k, \quad l = 1, \ldots N, \quad \text{où} \quad i^2 = -1. \tag{1}$$

b- Comparer les résultats fournis par votre fonction, avec ceux fournis par la commade `fft` de MATLAB .

2- Inverse de la transformée de Fourrier discrète
a- Ecrire une fonction MATLAB de prototype `[f]=monidft(g)` qui calcule la transformée de Fourrier discrète inverse du vecteur $g \in \mathbb{C}^N$, selon la formule

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \exp \frac{2i\pi(k-1)(l-1)}{N} g_l, \quad k = 1, \ldots N, \quad \text{où} \quad i^2 = -1. \tag{2}$$

b- Comparer les résultats fournis par votre fonction avec ceux fournis par la commade `ifft` de MATLAB .

3- Transformée de Fourrier discrète rapide
a- En décomposant la somme de la formule (2) en une somme portant sur les indices paires et une autre portant sur les indices impaires, montrer que le calcul de la transformée de Fourrier (dans le cas où N=2 M) peut se ramener à des calculs de transformées de Fourrier de longeurs M.

b- En utilisant l'argument de la question précédente, proposer une fonction MATLAB `[g]=monfft(f)`, qui calcule de façon optimale, la transformée de Fourrier discrète dans le cas où $N = 2^n$.
[*On utilisera la récurcivité dans la programmation*].

4- Comparaison
a- Modifier les fonctions `[g]=mondft(f)` et `[g]=monfft(f)` de sorte qu'elles retournent aussi le nombre d'opérations effectuées.

b- Comparer pour différentes valeurs de $N = 2^n$, les nombres d'opérations effectuées dans les deux cas.

Exercice - 2 *Matrice circulante*

1- Construction
On considère une matrice circulante $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par la donnée de sa première colonne : $c = [c_1\ c_2 \dots c_n]^T$.
a- Donner l'expression de son vecteur première ligne $r = [r_1\ r_2 \dots r_n]^T$.
b- On se place dans le cas particulier $n = 8$, et on définit la matrice A par $c = [2\ 1\ 6\ 7\ 3\ 4\ 8\ 5]^T$.

- Donner le vecteur première ligne r correspondant.
- Construire la matrice circulante A.
- Comparer la matrice obtenue à celle fournie par la commande MATLAB `A = toeplitz(c,r)`.

2- Matrice de permutation
On se place toujours dans le cas particulier de l'exemple précédent.
a- Construire la matrice circulante P définie par son vecteur première colonne cp dont toutes les composantes sont nulles sauf la deuxième qui vaut 1 (i.e $cp(2) = 1$).

b- Vérifier que $A = \sum_{l=1}^{8} c_l P^{l-1}$.

c- Construire les valeurs propres $\lambda_k, k = 1, \dots 8$ de la matrice P, vérifier qu'elles sont toutes distinctes et que $\lambda_k^8 = 1$. Déterminer les vecteurs propres associés.
[*on utilisera la commande* MATLAB `eig`].

d- Vérifier que P et A commutent et en déduire les vecteurs propres et valeurs propres $\mu_k, k = 1, \dots 8$ de A.

3- Inversion de système linéaire
Soit U la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres normés de la matrice P.
a- Montrer que U est unitaire et que $D = U^*AU$ est une matrice diagonale formée des valeurs propres de A. Démontrer ce résultat dans le cas générale.
b- Déduire de la question précédente un algorithme de résolution de l'équation $Ax = b$, où b est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ donné.

4- Relation avec la transformée de Fourrier
On se place maintenant dans le cas générale et on considère les matrices U et D définies comme à la question précédente.
a- Montrer que tous les éléments d'une ligne quelconque de la matrice $V = \sqrt{n}U$ sont distincts, et que la puisance n^{ime} de chacun vaut 1.
[*vérifier le résultat, sur l'exemple donné plus haut, à travers les commandes* `[u,l]=eig(P) ; (u * sqrt(8)).^ 8)`].
Montrer qu'il en est de même des colonnes de $V = \sqrt{n}U$.
b- Conclure de la question précédente que le calcul du produit par U et par U^* peut se faire respectivement, via la transformée de Fourrier discrète et la réciproque de la transformée de Fourrier discrète, de longueur n.

5- Inversion d'une matrice circulante via la transformée de Fourrier discrète
En s'inspirant des questions précédentes, programmer un algorithme de résolution du système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice circulante, en utilisant les transformées de Fourrier rapides.