Maîtrise de Mathématiques Fondamentales et Applications
Grands Systèmes Linéaires
feuille de TP 11

7 janvier 2010

Un algorithme de calcul de tous les valeurs et vecteurs propres d'une matrice

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{C}^n$ l'espace des vecteurs de taille n à coefficients complexes. Pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{C}^n$, on désigne par $< x, y >$ le produit scalaire hermitien et par $\|x\|$ la norme associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille n à coefficients complexes. On suppose que la matrice A a n valeurs propres distinctes et non nulles $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de vecteurs propres associés $v_1, \ldots, v_n$. On se propose dans ce problème de définir un algorithme de calcul simultané des $\mu_i, v_i, i = 1, \ldots, n$.

Exercice - 1 *Dérivation de l'algorithme*

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur quelconque.

1- Vérifier que $\prod_{1 \le j \le n} (A - \mu_j I)(x) = 0$.

2- Déduire de la question précédente que le vecteur $x_i = \prod_{1 \le j \ne i \le n} (A - \mu_j I)(x)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ_i.

3- Vérifier aussi que le quotient de Rayleigh de la matrice A en x_i $\left(\mathcal{R}_A(x_i) = \frac{<Ax_i, x_i>}{<x_i, x_i>}\right)$ vaut μ_i.

On considère alors les suites $\left\{x_i^{(k)}, \lambda_i^{(k)}, i = 1, \ldots n\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i^{(k+1)} = \displaystyle\prod_{1 \le j \ne i \le n} (A - \lambda_j^{(k)} I)(x_i^{(k)}), \\ \\ \lambda_i^{(k+1)} = \dfrac{< Ax_i^{(k+1)}, x_i^{(k+1)} >}{\|x_i^{(k+1)}\|^2}. \end{array} \right.$$

Exercice - 2 *Analyse de l'algorithme*

On se place dans cette question dans le cadre réel et on suppose la matrice A symétrique définie positive.

On se propose de montrer que sous l'hypothèse que les données initiales $(x_i^{(0)}, \lambda_i^{(0)}, i = 1, \dots n)$ sont *proches* de la solution exacte, la suite $x_i^{(k)}$ converge vers un vecteur propre v_i de la matrice A et la suite $\lambda_i^{(k)}$ converge vers la valeur propre μ_i associée.

Soit Q la matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs propres normés de la matrice A. Pour tout $k \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $x_i^{(k)} = Q y_i^{(k)}$. Et on désigne par $y_{i,l}^{(k)}$ la $l-$ème composante du vecteur $y_i^{(k)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1- Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i,l}^{(k+1)} = y_{i,l}^{(k)} \displaystyle\prod_{1 \leq j \neq i \leq n} (\mu_l - \lambda_j^{(k)}), \\ \\ |\lambda_i^{(k+1)} - \mu_i| = \dfrac{\sum_{l=1}^n |\mu_l - \mu_i| (y_{i,l}^{(k+1)})^2}{\sum_{l=1}^n (y_{i,l}^{(k+1)})^2} \end{array} \right.$$

2- Déduire l'inégalité

$$|\lambda_i^{(k+1)} - \mu_i| \leq \sum_{l \neq i} |\mu_l - \mu_i| \frac{\left(\frac{y_{i,l}^{(k+1)}}{y_{i,i}^{(k+1)}} \right)^2}{1 + \left(\frac{y_{i,l}^{(k+1)}}{y_{i,i}^{(k+1)}} \right)^2}.$$

Et conclure que

$$|\lambda_i^{(k+1)} - \mu_i| \leq \sum_{l \neq i} |\mu_l - \mu_i| \frac{\varrho_{ll}^2 C_{il}^{(k)}}{1 + \varrho_{ll}^2 C_{il}^{(k)}}, \tag{1}$$

où on a posé $\varrho_{jl} = |\lambda_j^{(k)} - \mu_l|$, et $C_{i,l} = \dfrac{(y_{i,l}^{(k)})^2 \prod_{j \neq i,l} \varrho_{jl}^2}{(y_{i,i}^{(k)})^2 \prod_{j \neq i} \varrho_{ji}^2}$.

On admet que selon l'hypothèse introduite ci-dessus, $\varrho_{jj} \ll \varrho_{jl} \quad \forall l \neq j$.

3- On pose $\varrho_m^{(k)} = \min\limits_{p \leq k, l \neq j} |\lambda_j^{(p)} - \mu_l|$ et $\varrho_M^{(k)} = \max\limits_{p \leq k, l \neq j} |\lambda_j^{(p)} - \mu_l|$.

Montrer les inégalités

$$\varrho_{ll} y_{i,l}^{(k)} (\varrho_m^{(k)})^{n-2} \leq y_{i,l}^{(k+1)} \leq \varrho_{ll} y_{i,l}^{(k)} (\varrho_M^{(k)})^{n-2}, \quad y_{i,i}^{(k)} (\varrho_m^{(k)})^{n-1} \leq y_{i,i}^{(k+1)} \leq y_{i,i}^{(k)} (\varrho_M^{(k)})^{n-1}.$$

En déduire que $C_{i,l}^{(k)} \leq (\frac{y_{i,l}^{(0)}}{y_{i,i}^{(0)}})^2 (\frac{\varrho_M^{(k)}}{\varrho_m^{(k)}})^{(2(k+1)(n-1)-2)}$.

4- En prenant le maximum par rapport à i dans (1), montrer qu'il existe une constante C telle que $\varrho_{k+1} \overset{def}{=} \max_i |\mu_i - \lambda_i^{(k+1)}| \leq C \varrho_k^2 (\frac{\varrho_M^{(k)}}{\varrho_m^{(k)}})^{2k(n-1)}$.

5- Montrer que ϱ_k tend vers zéro. Et conclure.

Exercice - 3 *Implémentation de l'algorithme*

Soient x_i et μ_i, les vecteurs propres normés et valeurs propres, approchés d'indice i, et ε la précision cherchée.

1- Choix du test d'arrêt : Montrer que la quantité $\varepsilon_i = 1 - \frac{|\mu_i|}{\|A(x_i)\|}$ vérifie $0 \leq \varepsilon_i \leq 1$. Que vaut cette quantité lorsque x_i est le vecteur propre associé à la valeur propre μ_i ? En déduire que ε_i peut permettre de mesurer la colinéarité des vecteurs x_i et $A(x_i)$. Justifier le test d'arrêt $\sup_i \varepsilon_i < \varepsilon$.

2- Initialisation : On initialise x_i à e_i où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique. On initialise μ_i à $A_{i,i}$ ($i-$ème terme de la diagonale de la matrice A). Commenter sur ce choix.

L'algorithme s'écrit alors

Initialisation : Pour $i = 1, \dots n, \;\; x_i = e_i, \mu_i = A_{i,i}$ **Fin Pour.**

Itérations : Tant Que $\sup_i \varepsilon_i \geq \varepsilon$

$$\textbf{Pour } i = 1, \dots n \left\| \begin{array}{l} x_i = \displaystyle\prod_{1 \leq j \neq i \leq n} (A - \mu_j I)(x_i), \\ x_i = \dfrac{x_i}{\|x_i\|} \quad (\textbf{normalisation}), \\ \mu_i = < x_i, A(x_i) > \end{array} \right\} \textbf{ Fin Pour.}$$

Fin Tant Que.

3- Programmer l'algorithme précédent sous MATLAB à travers une fonction dont les arguments d'entrée et de sortie seront bien commentés.

4- Valider votre programmation sur un exemple de votre choix. Comparer l'algorithme présenté à un algorithme de votre choix, en insistant sur les temps de calcul et les besoins en espace mémoire.