Maîtrise de Mathématiques Fondamentales et Applications
Grands Systèmes linéaires
feuille de TP 2

17 septembre 2009

Exercice - 1 *Décomposition en valeurs singulières.*

Le but de cet exercice est d'écrire un algorithme qui permette de décomposer en valeurs singulières une matrice réelle A de taille $m \times n$ (avec $m \geq n$). On rappelle que la décomposition en valeurs singulières de A est l'écriture $A = V\tilde{\Sigma}U^*$, avec V et U des matrices unitaires (orthogonales dans ce cas réel, où U^* désignera alors U^t) de tailles respectives m et n ; et $\tilde{\Sigma}$ une matrice de taille $m \times n$ dont les seuls éléments non nuls sont situés sur la diagonale de sa sous-matrice principale d'ordre r, et correspondent aux valeurs singulières de A classées par ordre décroissant.

Note : n'ayant pas encore implémenter la détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice, on utilisera la commade `eig` *de* MATLAB , *ainsi que la commande* `sort`.
En utilisant l'aide en ligne de MATLAB , renseignez-vous sur ces commandes.

1- En développant A^*A (où $A = V\tilde{\Sigma}U^*$), expliquer comment déterminer U et $\tilde{\Sigma}$.

2- On suppose que A est de rang r. Justifier qu'il en est de même de A^*A. En déduire que le nombre de valeurs singulières non nulles de A est égale à son rang.

3- En écrivant $AU = V\tilde{\Sigma}$, donner un moyen de construire les r premiers vecteurs colonnes ($[v_1|\cdots|v_r]$) de V.

4- Il ne reste plus qu'à compléter la base $(v_1 \cdots v_r)$ en une base orthonormale $(v_1 \cdots v_r, v_{r+1} \cdots v_m)$ de $\mathbb{R}^m$ et de poser ensuite $V = [v_1 \cdots |v_r|v_{r+1}| \cdots |v_m]$.

a- On remarque que l'ajout de chaque nouveau vecteur colonne consiste à déterminer alétoirement un vecteur de norme unité orthogonal à tous les précédents. On décide alors d'utiliser la matrice d'une projection orthogonale : on suppose construits $v_1 \cdots v_j$, $r \leq j \leq m-1$, et on désire construire v_{j+1}. On introduit la matrice $M = I_m - VV^t$, où $V = [v_1|\cdots|v_j]$ et I_m est la matrice identité d'order m. Caractériser la matrice M et expliquer comment construire v_{j+1}.

b- Aux termes de la construction, vérifier qu'on a bien $A = V\tilde{\Sigma}U^*$.

5- Ecrire une fonction MATLAB de prototype `function [V,S,U,r] = maSvd(A)` qui prend en entrée une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), m \geq n$, et retourne les matrices V, S, U, de sa décomposition en valeur singulière ($A = VSU^*$), ainsi que son rang r.

6- Ecrire une fonction MATLAB de prototype `function [B] = monPseudoInv(A)` qui prend en entrée une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), m \geq n$, et retourne son pseudo-inverse. Evaluer cette fonction sur quelques matrices en testant à chaque fois le pseudo-inverse produit.

Exercice - 2 *Utilisation de la décomposition en valeurs singulières : compression d'image.*

Le but de cet exercice est d'appliquer l'outil "SVD" sur un cas concret.
(*note : on pourra aussi utiliser la commande* `svd` *de* MATLAB).

1- Récupérer les données image : `lena.dat`. Les données sont stockées sous forme d'une matrice carrée 128×128, la taille de l'image, en niveau de gris (0 correspond à la couleur noire, 1 à la couleur blanche, les valeurs intermédiares sont des niveaux de gris entre ces valeurs extrêmes). L'image sera stockée sous la forme d'une matrice grâce à la commande `load`.

2- Pour afficher l'image, utiliser les commandes `colormap, imagesc`.

3- En considérant l'image comme étant une matrice, calculer sa décomposition en valeurs singulières.

4- Reconstruire des images en utilisant uniquement les 10, 20, et 50 directions "propres" correspondant au plus petites valeurs singulières, refaire la même chose avec les plus grandes valeurs singulières. Interpréter les résultats.