Maîtrise de Mathématiques Fondamentales et Applications
Grands Systèmes Linéaires
feuille de TP 9

10 décembre 2007

Exercice - 1 *Méthode de bissection (ou dichotomie) de Givens*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale symétrique.

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & c_{n-1} & b_n \end{bmatrix},$$

où $c_i \neq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1$.

1- On désigne par A_i la sous-matrice principale d'ordre i de A et on pose $p_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda I_i)$, son polynôme caractéristique.

a- En développant le déterminant $\det(A_i - \lambda I_i)$ par rapport à la dernière colonne, montrer que la suite p_i vérifie la relation de recurrence

$$\left\| \begin{array}{l} p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = b_1 - \lambda, \\ p_i(\lambda) = (b_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - c_{i-1}^2 p_{i-2}(\lambda), \quad \forall i \geq 2. \end{array} \right.$$

b- Écrire une fonction MATLAB de prototype `function [r] = pc(b,c,i,lambda)` définissant la $i-$ème fonction de cette suite. b et c sont respectivement des vecteurs de taille n et $n-1$ représentant la diagonale principale et la première sur-diagonale de la matrice A.

c- Écrire une fonction MATLAB de prototype `[ni]=Nracines(A, i,` μ`)`
qui calcule pour une matrice tridiagonale symétrique A, le nombre de racines de p_i qui sont strictement inférieures à μ, comme étant le nombre de changement de signe entre éléments consécutifs de l'ensemble $\{1, \text{sgn}p_1(\mu), \ldots \text{sgn}p_i(\mu)\}$. Où l'on a posé

$$\text{sgn}p_i(\mu) = \begin{cases} \textit{signe de } p_i(\mu) & \textit{si } p_i(\mu) \neq 0, \\ \textit{signe de } p_{i-1}(\mu) & \textit{si } p_i(\mu) = 0. \end{cases}$$

[*On pourra utiliser le fichier suivant*]

script évaluant le nombre de racines de p_i plus petites que q'un nombre μ

```
function [ni]=Nracines(A,i,mu)
b=diag(A);
c=diag(A,1);
ni=0;
for l=0:i-1
    if(sgn(b,c,l,mu)*sgn(b,c,l+1,mu) < 0)
        ni=ni+1;
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [s]=sgn(b,c,i,mu)
v=pc(b,c,i,mu);
if(v>0)
    s=1;
elseif(v<0)
    s=-1;
else
    s= sgn(b,c,i-1,mu);
end
```

2- On suppose que la matrice A a n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$.

a- Soit $1 \leq i \leq n$ un entier. On suppose que la valeur propre λ_i se trouve dans l'intervale $[a_0, b_0]$. Montrer que :
`Nracines`$(A, n, \frac{a_0+b_0}{2}) \geq i \Longrightarrow \lambda_i \in [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}[$
`Nracines`$(A, n, \frac{a_0+b_0}{2}) < i \Longrightarrow \lambda_i \in [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$.

En déduire qu'on peut déterminer la valeur propre λ_i par dichotomie avec une précision ε donnée.

b- Ecrire une fonction Matlab de prototype `function [lambda] = bissection(A,i,a0,b0,eps)` qui détermine la $i-$ème valeur propre de la matrice `A`, avec une précision `eps`, où `[a0,b0]` est un intervalle de départ contenant ladite valeur propre (on pourra prendre `a0=-norm(A,'inf')`, `b0=norm(A,'inf')`).

Exercice - 2 *Méthode de Lanczos*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
1- Programmer l'algorithme de Lanczos à travers une fonction Matlab

$$\texttt{function}[\texttt{V}, \texttt{T}, \texttt{k0}] = \texttt{lanczos}(\texttt{A}, \texttt{r0}, \texttt{k}),$$

qui prend comme arguments

- la matrice symétrique A,
- un vecteur r_0 et un entier k, définissant l'espace de Krylov $K_k = \{r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0\}$,

et fournit

- un entier k_0 égal à k ou coincidant avec la dimension critique de Krylov si k est supérieur à la dimension critique de Krylov.
- une matrice V de taille $n \times k_0$ dont les colonnes sont les k_0 premiers vecteurs orthonormés de la base de l'espace de Krylov K_{k_0},
- une matrice T tridiagonale de taille $k_0 \times k_0$ telle que $V^* AV = T$.

2-

a- Générer aléatoirement une matrice symétrique définie positive A de taille $n \times n$, et déterminer sa plus grande valeur propre λ_A à l'aide de la commande `eig`.

b- Faire varier $k = 2, \ldots n$, et comparer à chaque fois la plus grande valeur propre de T obtenue par la méthode de bissection de l'exercice précédent à λ_A.

[*On pourra prendre pour r_0 le premier vecteur colonne de la matrice A*].
c- A-t-on toujours $AV = VT$? Comment évolue la valeur absolue de la différence des plus grandes valeurs propres de A et de T en fonction de la norme de Frobenius de $AV - VT$? En fonction de la dernière composante du vecteur propre de T associé à sa plus grande valeur propre ?