© J.-B.A.K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>

TP 2 : Résolution numérique d'un problème de calcul des variations : problème du brachistochrone.

On souhaite résoudre numérique un problème d'optimisation donné sous la forme :

$$\text{Minimiser} J(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')\, dx \text{ sur } K = \{v \in C^1(x_A, x_B) : v(x_A) = y_A, v(x_B) = y_B\}, \tag{1}$$

avec $f : [x_A, x_B] \times C^1(x_A, x_B) \times C^0(x_A, x_B) \to \mathbb{R}$ est une fonction de trois variables à valeurs réelles, suffisamment régulière.

Nous nous focaliserons sur un cas particulier pour lequel il est possible d'exhiber une solution analytique. C'est le problème du *brachistochrone :* consistant à déterminer parmi les courbes reliant deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, celle sur laquelle une particule sous le seul effet de la gravité mettrait le moins de temps pour passer d'une extrémité à l'autre.

La fiche est formée de trois parties :
- partie 1 : On présente un problème concret et une solution analytique qui servira de référence.
- partie 2 : On présente un problème discret associé et une résolution numérique.
- partie 3 : On fournit un travail à rendre visant à explorer d'autres pistes de résolution.

Note 1.

- Un choix express est fait de ne pas fournir de prototype aux fonctions nécessaires, afin de vous laisser toute latitude d'utiliser des outils que vous avez développés notamment dans le cours MAP-OPT1.
- Il est important de :
  - bien identifier les avantages que représente la méthode que nous avons appelée Méthode d'éléments finis P1-Lagrange dans l'approximation d'un problème de calcul des variations,
  - noter l'importance de la répartition non uniforme des points de discrétisation,
  - réfléchir à un moyen d'obtention de la meilleure répartition de ces points.

Partie - 1 *Le problème du brachistochrone et la solution analytique*

Q-1 : Montrer que dans le cadre du brachistochrone la fonction f est donnée par :

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g(y_A - y(x))}}$$

Q-2 : En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange, montrer qu'on a

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c.$$

où c est une constante. En déduire que

$$(y_A - y)(1 + y'^2) = \frac{1}{2gc^2}$$

Q-3 : En posant $2gc^2 = \frac{1}{2R}$ et $y' = -\coth\frac{\theta}{2}$, en déduire que la solution analytique du problème est donnée par

$$\begin{cases} x(\theta) &= x_A + R\,(\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) &= y_A - R\,(1-\cos(\theta)) \end{cases} \qquad \theta_0 \le \theta \le \theta_1$$

où θ_0, θ_1, R seront déterminés en fonction des données du problèmes : $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$.

Q-4 : Montrer en particulier que pour $A = (0, 10)$ et $B = (10, 0)$, on a

$$\begin{cases} x(\theta) &= 5.729170\,\theta &- &5.729170\ \sin(\theta) \\ y(\theta) &= 4.270830 &+ &5.729170\ \cos(\theta) \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2.412011. \tag{2}$$

Ind : on peut minimiser la fonctionnelle $\varphi(R, \theta_1) = (x(\theta_1) - x_B)^2 + (y(\theta_1) - y_B)^2$
avec pour donnée initiale $(R, \theta_1) = (1, \frac{\pi}{2})$.

Note 2.

Dans toute la suite les tests numériques porteront sur cet exemple (2).

Partie - 2 *Problème discret par différences finis et solution numérique*

Nous explorons à présent la résolution numérique du problème par différences finies.

On introduit un maillage de l'intervalle $[x_A, x_B]$ uniforme de pas $h = (x_B - x_A)/(N+1)$. Ce qui génère les sommets $x_i = x_A + ih, i = 0, \ldots, N+1$. On désigne par y_i la valeur approchée de $y(x_i)$, pour $i = 0, \ldots, N+1$.

Le problème discret devient

$$\text{Minimiser} J^{DF}(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{N} h \times \sqrt{\frac{1 + \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{h^2}}{2g(y_A - \frac{y_{i+1}+y_i}{2})}} \text{ sur } K = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N+2} : \mathbf{v}_0 = y_A, \mathbf{v}_{N+1} = y_B\}, \tag{3}$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur de composantes $(y_1, \ldots, y_N)$.

Q-5 : Calculer le gradient de J^{DF}. Vérifier ce calcul en le comparant avec une approximation du gradient obtenue par différences finies.

Q-6 : Résoudre le problème de minimisation (3)
- soit en utilisant la boîte à outils de Matlab pour l'optimisation (ed *fminunc, fminsearch, sqp* ...
- soit en utilisant un algorithme de minimisation sans contrainte de votre choix vu en cours : l'idéal serait d'utiliser la méthode *BFGS* avec recherche linéaire satisfaisant le critère de *Wolfe* (voir cours MAP-OPT1 dont le présent cours est le complément.)

Q-7 : Représenter sur une même figure la solution analytique et la solution calculée.

Q-8 : Faire varier N en le prenant de plus en plus grand. Commenter les résultats observés.

Partie - 3 *Problème discret par éléments finis et solution numérique*

Nous avons constaté dans l'approximation de J par J^{DF} deux difficultés :
- l'approximation de $\frac{dy}{dx}$, i.e. $y'(x)$,
- l'approximation de $y(x)$ au dénominateur de f dans J.

Par ailleurs, aucun cadre fonctionnel n'est décrit dans la définition de J^{DF}. Nous allons nous placer dans un cadre où ces difficultés n'auront plus lieu.

Partie - 3- 1 *Cas d'un maillage uniforme*

Pour cela nous effectuons la modification suivante : pour le maillage $x_A = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = x_B$ de $[x_A, x_B]$:

— l'inconnue demeure le vecteur des $y_i, i = 0, \ldots, N+1$

— la restriction de y sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré 1. C'est-à-dire

$$y|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) = y_i + (x - x_i)\frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

On dit qu'on a discrétisé le problème (1) par la méthode des éléments finis *P1-Lagrange*. On a ici un meilleur cadre fonctionnel car la solution est cherchée dans un espace $K_h = \{v_h \in C([x_A, x_B] : v_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in P_1([x_i, x_{i+1}]), i = 0, \ldots, N\}$, qui approche d'une manière quantifiable l'espace de Sobolev $H^1(]x_A, x_B[)$. On a posé $P_1([a, b])$ l'espace des polynômes de degré au plus 1 sur $[a, b]$.

Q-9 : Montrer que dans ce cas J devient

$$J^{EF}(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{\frac{1 + y'(x)}{2g(y_A - y(x))}}\,dx = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\frac{1 + \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{h^2}}{2g}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{y_A - y_i - (x - x_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{h}}}\,dx. \quad (4)$$

Q-10 : Achever les calculs puis calculer le gradient de J^{EF} et vérifier ce calcul par la méthode de différences finies.

Q-11 : Résoudre le problème de minimisation (4). Et afficher la valeur optimale du critère.

Q-12 : Représentez sur le même graphique la solution exacte et la solution approchée, pour quelques valeurs de N.

Q-13 : Comparez la solution obtenue avec la solution obtenue par la méthode de différences finis décrite précédemment (voir Partie 2).

Partie - 3- 2 *Cas d'un maillage non uniforme*

Le maillage n'est plus uniforme c'est-à-dire que les points t_i ne sont plus distribués de manière uniforme. On pose alors $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, \ldots, N$.

Q-14 : Montrer que dans ce cas

$$J^{EF}(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\frac{1 + \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{h_i^2}}{2g}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{y_A - y_i - (x - x_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}}}\,dx \quad (5)$$

Q-15 : Calculer la solution pour un maillage défini par : $x_i = 5.729170\, i\, \frac{2.412011}{N+1} - 5.729170\, \sin(i\, \frac{2.412011}{N+1}), i = 0, \ldots, N+1$.

Q-16 : Pour de petites valeurs de N par exemple $N = 5$, représenter sur le même graphique la solution obtenue pour le maillage non uniforme ci-dessus et celle obtenue sur un maillage uniforme pour cette valeur de N. Commentez les résultats.

On constate que le maillage non uniforme précédent a conduit pour un même nombre de points de discrétisation à un meilleur résultat. Malheureusement, dans un cadre général on ne disposer d'un tel maillage non uniforme. Pour cela on peut inclure les points de discrétisation dans la liste des inconnus. Dans ce cas la fonctionnelle à minimiser devient :

$$J^{EF}(\mathbf{u},\mathbf{h}) = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\frac{1+\frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{h_i^2}}{2g}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{y_A - y_i - (x-x_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}}}\, dx, \tag{6}$$

avec les contraintes supplémentaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=0}^{N} h_i & = & x_B - x_A \\ h_i & > & 0, \quad i = 0, \ldots, N \end{array} \right. \tag{7}$$

Q-17 **:** Achever les calculs et déterminer $\nabla_h J^{EF}$ le gradient de J^{EF} par rapport à $\mathbf{h}$ ainsi que le gradient $\nabla_u J^{EF}$ de J^{EF} par rapport à $\mathbf{u}$.

Q-18 **:** Pour $N = 5$, et la solution $\mathbf{u}$ obtenue à la partie 2.

Q-18**-**1 **:** Résoudre le problème de minimisation par rapport à $\mathbf{h}$ en initialisant avec un pas uniforme.

Q-18**-**2 **:** Comparer les pas obtenus avec ceux de la partie 2.

Q-19 **:** Proposer un algorithme de résolution numérique d'un problème de calcul des variations

où on a fixé un nombre N de points d'approximation.

Q-20 **:** Valider votre algorithme sur le cas du problème modèle avec $N = 5, 15$.