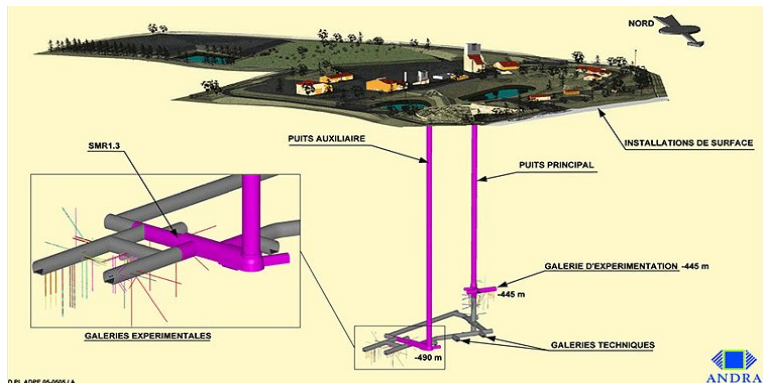


Eléments finis discontinus et zoom numérique, applications aux écoulements dans les milieux poreux

Jean-Baptiste APOUNG KAMGA

Thèse de Doctorat de l'UPMC
Directeur de thèse:
Olivier PIRONNEAU

06 décembre 2006



D FL ADPE 05-0506 / A

Equations Modèles

Exercice couplé (Andra - CEA)

Ecoulement régime permanent

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (K \nabla H) = 0 & \text{dans } \Omega \\ H = H_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial H}{\partial n} = 0 & \text{ailleurs} \\ \mathbf{u} = -K \nabla H & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

- K : tenseur de perméabilité
- R est le facteur de retard, il vaut 1 pour l'ode 129.
- La porosité effective ω , vaut 0.001 dans l'argile et 0.1 ailleurs.
 $\lambda = \log(2)/T$ avec T la période :
Pour l'ode, $T = 1.57 \times 10^7$.
- de : diffusion moléculaire, α_l, α_t : coefficient de dispersion longitudinale, et transversale.
- $D = de / (1 + |\mathbf{u}|) (\alpha_l E(\mathbf{u}) + \alpha_t (I - E(\mathbf{u})))$

Equation de transport

$$\left\{ \begin{array}{l} R\omega \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \lambda C \right) - \nabla \cdot (D \nabla C) + \mathbf{u} \cdot \nabla C = f \quad \text{dans } \mathcal{O} \times (0, T) \\ +CL, +CI \end{array} \right.$$

- 1 Un formalisme Galerkin discontinu
 - Cas de l'équation de transport
 - Cas de l'équation de l'écoulement
 - Application
- 2 Méthode de zoom numérique
 - Introduction
 - Méthode
 - Application
- 3 Conclusion et perspectives



- 1 Un formalisme Galerkin discontinu
 - Cas de l'équation de transport
 - Cas de l'équation de l'écoulement
 - Application

- 2 Méthode de zoom numérique
 - Introduction
 - Méthode
 - Application

- 3 Conclusion et perspectives



Principe des méthodes Galerkin discontinues

- Approximation totalement discontinue
- Intégration par parties au niveau des cellules.
- Choix des flux.

Avantages des méthodes Galerkin discontinues

- Conservent localement la masse
- Sont bien adaptées pour l'advection dominante
- Sont hautement parallélisables
- Sont locales (degrés de libertés associés aux éléments)

Inconvénients pour nos applications

- Nécessite la limitation de pente
- Ne dispose pas de critère rigoureux de choix de la CFL (sur le pas de temps)

Espaces

$\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$, (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur \mathcal{H} .
En pratique, $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$.

Hypothèses

$\exists \mathcal{A}_i, i = 0, 1, 2$ trois formes bilinéaires telles que :

- \mathcal{A}_1 est symétrique définie positive.
- $\exists \mathcal{A}_3$ telle que
 $2\mathcal{A}_0(U, U) \geq -\mathcal{A}_1(U, U) + \mathcal{A}_3(U, U); \quad 2\mathcal{A}_2(U, V) \leq \mathcal{A}_1(U, U) + \mathcal{A}_3(V, V)$

Problème abstrait

Soit $U_0 \in \mathcal{V}$

Chercher $U \in C^1(0, T; \mathcal{V})$ telque $\forall V \in \mathcal{V}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} U, V \right) + \mathcal{A}_0(U, V) + \mathcal{A}_1(U, V) - \mathcal{A}_2(U, V) = 0$$

$U = U_0$ à $t = 0$.

schéma

$$\left(\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t}, V_h \right) + \mathcal{A}_0(U_h^{n+1}, V_h) + \mathcal{A}_1(U_h^n, V_h) - \mathcal{A}_2(U_h^n, V_h) = 0 \quad \forall V_h.$$

Théorème

Sous les conditions précédentes sur $\mathcal{A}_i, i = 0, 1, 2$, si

$$\Delta t \mathcal{A}_1(U_h, U_h) \leq (U_h, U_h), \quad \forall U_h \in \mathcal{V}_h.$$

Alors le schéma d'ordre 1 est stable et on a :

$$(U_h^{n+1}, U_h^{n+1}) \leq (U_h^n, U_h^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

schéma

$$\frac{1}{3} \left(\frac{3U_h^{n+1} - 4U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t}, V_h \right) + \frac{2}{3} \mathcal{A}_0(U_h^{n+1}, V_h) + \frac{2}{3} \mathcal{A}_1(2U_h^n - U_h^{n-1}, V_h) - \frac{2}{3} \mathcal{A}_2(2U_h^n - U_h^{n-1}, V_h) = 0, \quad \forall V_h.$$

Théorème

Sous les conditions précédentes sur $\mathcal{A}_i, i = 0, 1, 2$, si

$$2\Delta t \mathcal{A}_1(U_h, U_h) \leq (U_h, U_h), \quad \forall U_h \in \mathcal{V}_h.$$

alors le schéma d'ordre 2 est stable et on a

$$\begin{aligned} & (U_h^{n+1}, U_h^{n+1}) + (2U_h^{n+1} - U_h^n, 2U_h^{n+1} - U_h^n) \\ & \leq (U_h^n, U_h^n) + (2U_h^n - U_h^{n-1}, 2U_h^n - U_h^{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

CFL et paramètres de stabilisation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} U, V\right) + \mathcal{A}_0(U, V) + \mathcal{A}_1^\alpha(U, V) - \mathcal{A}_2^\alpha(U, V) = 0, \quad \forall V \in \mathcal{V}.$$

↪ La condition CFL prend alors la forme :

$$\left(\max_{U_h \in \mathcal{V}_h, U_h \neq 0} \frac{\mathcal{A}_1^\alpha(U_h, U_h)}{(U_h, U_h)}\right) \Delta t \leq C$$

↪ il existe un meilleur α , noté α_{opt}

problème de min-max

$$\left(\max_{U_h \in \mathcal{V}_h, U_h \neq 0} \frac{\mathcal{A}_1^{\alpha_{\text{opt}}}(U_h, U_h)}{(U_h, U_h)}\right) \leq \left(\max_{U_h \in \mathcal{V}_h, U_h \neq 0} \frac{\mathcal{A}_1^\alpha(U_h, U_h)}{(U_h, U_h)}\right), \forall \alpha.$$

Avantage

- Dans la pratique, \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 sont locales \leftrightarrow faible coût.

Démarche

- 1 Intégrations par parties $\hookrightarrow \mathcal{A}_0$ est contribution volumique.
- 2 Action sur l'interface $\hookrightarrow \mathcal{A}_1$ est contribution locale.
- 3 Prise en compte des conditions aux limites $\hookrightarrow \mathcal{A}_2$.

Advection pure

$\partial_t \mathbf{c} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^2, \quad t > 0. \quad \mathcal{V} = \oplus_k H^1(\Omega_k) \subset \mathcal{H} = \oplus_k L^2(\Omega_k).$
 $\forall U = (u_k) \in \mathcal{V}$ et $V = (v_k) \in \mathcal{V}$, on a :

$(\mathcal{A}_i), i = 0, 1, 2, 3$

$$\mathcal{A}_0(U, V) = - \sum_k \int_{\Omega_k} u_k(t, \mathbf{x}) \mathbf{u} \cdot \nabla v_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \mathcal{A}_1(U, V) = \sum_k \int_{\partial\Omega_k} u_k(t, \mathbf{x}) v_k(\mathbf{x}) (\mathbf{u}, \mathbf{n}_k^+) d\sigma$$

$$\mathcal{A}_2(U, V) = \sum_k \left(\sum_j \int_{\Sigma_{kj}} u_j(t, \mathbf{x}) v_k(\mathbf{x}) (\mathbf{u}, \mathbf{n}_j^+) d\sigma \right) \quad \mathcal{A}_3(U, V) = - \sum_k \int_{\partial\Omega_k} u_k(t, \mathbf{x}) v_k(\mathbf{x}) (\mathbf{u}, \mathbf{n}_k^-) d\sigma$$

Lemme

Sur un maillage uniforme de pas h , La condition CFL abstraite pour le schéma d'ordre 1 est satisfaite si pour tout $\forall p \in \mathbf{N} \exists C_p^1 > 0, C_p^2 > 0$ telles que

$$\frac{3}{2} \Delta t \times \max_k \left(\frac{\alpha_{kj}}{C_p^1 h} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{4\alpha_{kj} C_p^1 h} + \frac{K_k^2}{\alpha_{kj} C_p^2 h^3} \right) \leq 1,$$

Si de plus K est constant, alors

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{|\mathbf{u}|^2}{4} + \frac{K^2 C_p^1}{C_p^2 h^2}}.$$

Observation

- CFL classique (méthode des différences finies).
- Interpolation continue entre l'advection pure et la diffusion pure.

Théorème : (estimation L^2 – advection pure)

Soit $c \in \mathcal{V}$ la solution continue dans le cas de l'advection pure ($K \equiv 0$) avec la condition initiale $c_0 \in H^s (s \geq 2)$ et $U_h \in \mathcal{V}_p$ la solution du schéma d'ordre 2. Sous l'hypothèse de la condition CFL, Il existe deux constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de T et c telles que

$$\|(c - U_h)(T)\|_{L^2} \leq 3\|\pi_h c(\Delta t) - U_h^1\|_{L^2} + C_1(\Delta t)^2 + C_2 h^{\mu-1},$$

où $\mu = \min(p + 1, s)$.

Observations

- Optimalité en temps.
- Sous-optimalité en espace. Mais au moins de l'ordre du degré d'approximation polynômiale.

Tests numériques :(wang,99,Bastian,03)

$\Omega = (-0.5, 0.5)^2$, $\mathbf{u} = (-4y, 4x)$ $K = 10^{-4}$, $x_c = 0.25$, $y_c = 0$ et $2\sigma^2 = 0.004$.
 $[0, T] = [0, \pi/4]$ $c(t, x, y) = \frac{2\sigma^2}{2\sigma^2 + 4Kt} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-x_c)^2 + (\bar{y}-y_c)^2}{2\sigma^2 + 4Kt}\right)$,
 $\bar{x} = x \cos(4t) + y \sin(4t)$ et $\bar{y} = -x \sin(4t) + y \cos(4t)$.

h	ordre 1		ordre 2	
	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux
polynômes P_0				
1/16	6.77E - 02	—	6.78E - 02	—
1/32	6.06E - 02	0.16	6.09E - 02	0.16
1/64	5.02E - 02	0.27	5.06E - 02	0.27
1/128	3.71E - 02	0.44	3.76E - 02	0.43
polynômes P_1				
1/16	3.28E - 02	—	3.14E - 02	—
1/32	1.27E - 02	1.37	1.06E - 02	1.56
1/64	3.89E - 03	1.71	2.27E - 03	2.23
1/128	1.31E - 03	1.57	4.61E - 04	2.30

h	ordre 1		ordre 2	
	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux
polynômes P_2				
1/16	1.12E - 02	—	5.83E - 03	—
1/32	4.49E - 03	1.32	4.91E - 04	3.57
1/64	2.17E - 03	1.05	5.21E - 05	3.24
1/128	1.05E - 03	1.05	.91E - 06	2.72
polynômes P_3				
1/16	8.02E - 03	1.21	6.11E - 04	4.10
1/32	4.15E - 03	0.95	2.63E - 05	4.54
1/64	2.08E - 03	1.00	3.40E - 06	2.95
1/128	9.81E - 04	1.08	5.97E - 07	2.51

Observation

- Optimalité en temps.
- Sous-optimalité en espace.

Advection pure (autres approches)

	Nouveau Formalisme		RKDG	
h	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux
1/32	$1.31E - 02$	—	$1.31E - 02$	—
1/64	$3.08E - 03$	2.09	$3.08E - 03$	2.09
CPU(s)	81.38		90.34	
	TVBMRKDG		Crank-Nicholson	
h	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux
1/32	$2.96E - 02$	—	$1.31E - 02$	—
1/64	$1.39E - 02$	1.09	$3.07E - 03$	2.09
CPU(s)	32400		553.93	

RKDG, TVBMRKDG : Cockburn, Shu. I II III (1989-)

Crank-Nicholson : Brezzi, Marini, Süli (2004).

Gain en temps CPUs.

Diffusion pure (autres approches)

h	Nouveau formalisme			NIPG		
	erreur L^2	taux	CPU(s)	erreur L^2	taux	CPU(s)
1/32	$5.16E - 05$	–	119.8	$1.14E - 03$	–	71.25 + renum
1/64	$1.28E - 05$	2.02	1855	$2.84E - 04$	2.00	1519 + renum
				SIPG		
1/32				$1.10E - 03$	2.02	71.21 + renum
1/64				$2.75E - 04$	2.00	1334 + renum

NIPG, SIPG : Rivière, Wheeler, Girault (1999-2000). Brezzi, Manzini, Marini, Pietra, Russo (2000)

Gain en temps CPUs.

- 1 Un formalisme Galerkin discontinu
 - Cas de l'équation de transport
 - **Cas de l'équation de l'écoulement**
 - Application
- 2 Méthode de zoom numérique
 - Introduction
 - Méthode
 - Application
- 3 Conclusion et perspectives



But

Bien construire la pression et la vitesse de Darcy.

Contraintes

- Problème (3D) de grande taille \leftrightarrow rester bas en ordre d'approximation.
- Méthodes mixtes DG : complexes à interpréter et nécessitent beaucoup d'espace mémoire.

Question

Comment obtenir de la formulation primale la variable duale ?

Observation : Bastian Rivière (2003)

Une vitesse à **trace normale discontinue** conduit à des **oscillations non physiques** dans l'équation de transport.

- Maillage quasi-uniforme \mathcal{T}_h . $h = \max_{E \in \mathcal{T}_h} h_E$.

- Décomposition des faces (3D) arêtes(2D)

$$\xi_h = \xi_h' \cup \xi_h^\partial, \quad \xi_h^\partial = \xi_h^D \cup \xi_h^N$$

- Espace produit ("broken space")

$$H^s(\mathcal{T}_h) = \prod_{E \in \mathcal{T}_h} H^s(E) \subset L^2(\Omega), \quad s \geq 2$$

- Espace éléments finis

$$\mathcal{V}_h^k = \prod_{E \in \mathcal{T}_h} \mathcal{P}_k(E) = \{v \in L^2(\Omega); v|_E \in \mathcal{P}_k(E), \quad \forall E \in \mathcal{T}_h\}$$

- Saut et moyenne : $u \in H^s(\mathcal{T}_h)$, $e = E \cap E'$, n orientée de E vers E'

$$[[u]] = (u|_E)|_e - (u|_{E'})|_e, \quad \{u\} = \frac{(u|_E)|_e + (u|_{E'})|_e}{2}$$

Formulation faible équivalente

$$\textcircled{1} \quad B(p, q) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E K \nabla p \cdot \nabla q \, dx, \quad L(q) = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E f q \, dx$$

$$\textcircled{2} \quad J(p, q) = \sum_{e \in \xi'_h} \int_e \{(K \nabla p) \cdot n_e\} [q] \, d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e (K \nabla p) \cdot n_e q \, d\gamma$$

$$\textcircled{3} \quad J^\alpha(p, q) = \sum_{e \in \xi'_h} \frac{\alpha}{2} \int_e [p][q] \, d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^D} \alpha \int_e p q \, d\gamma$$

$$\textcircled{4} \quad H^\alpha(p, q) = \sum_{e \in \xi'_h} \frac{1}{2\alpha} \int_e [(K \nabla p) \cdot n_e] [(K \nabla q) \cdot n_e] \, d\gamma,$$

$$\textcircled{5} \quad H_{BN}^\alpha(p, q) = \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{1}{\alpha} \int_e (K \nabla p) \cdot n_e (K \nabla q) \cdot n_e \, d\gamma$$

$$\textcircled{6} \quad H_N^\alpha(q) = \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{1}{\alpha} \int_e g_N (K \nabla q) \cdot n_e \, d\gamma \quad L_N(q) = \sum_{e \in \xi_h^N} \int_e g_N q \, d\gamma$$

$$\textcircled{7} \quad J_D(q) = \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e p_D \{(K \nabla q) \cdot n_e\} \, d\gamma \quad \text{et} \quad J_D^\alpha(q) = \sum_{e \in \xi_h^D} \alpha \int_e p_D q \, d\gamma$$



Formulation discrète : $a_h(p_h, q_h) = I_h(q_h)$

$\forall p_h, q_h \in \mathcal{V}_h^k$ on pose :

$$a_h(p_h, q_h) =$$

$$B(p_h, q_h) - J(p_h, q_h) + J(q_h, p_h) + J^\alpha(p_h, q_h) + H^\alpha(p_h, q_h) + H_{BN}^\alpha(p_h, q_h)$$

$$I_h(q_h) = L(q_h) + L_N(q_h) + J_D(q_h) + J_D^\alpha(q_h) + H_N^\alpha(q_h)$$

Observation

Ce formalisme conduit à

- Une formulation **Bauman-Oden** stabilisée par les sauts de l'inconnu et ceux de sa dérivée normale.
- Un ajout du saut de la dérivée normale dans la formulation NIPG (**Rivière 02, Girault 78**).
- Un ajout du terme de saut de l'inconnue dans la formulation de (**Romkes, Prudhomme, Oden, 2003**).

Estimations a priori en norme discrète et en norme L^2

- Espace :

$$\mathcal{V}(h) = \mathcal{V}_h^k + H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), s \geq 2$$

- Norme d'énergie :

$$\|q\|^2 = B(q, q) + J^{\alpha_h}(q, q) + H^{\alpha_h}(q, q) + H_{BN}^{\alpha_h}(q, q) + M(q, q)$$

Définition de $M(\cdot, \cdot)$

$$M(p, q) = \sum_{e \in \xi'_h} \frac{2}{\alpha_h} \int_e \{(K \nabla p) \cdot n_e\} \{(K \nabla q) \cdot n_e\} d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^D} \frac{1}{\alpha_h} \int_e (K \nabla p) \cdot n_e (K \nabla q) \cdot n_e d\gamma$$

Propositions

- Orthogonalité :

$$a_h(p - p_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{V}_h^k$$

- Continuité dans $\mathcal{V}(h)$:

$$\exists C > 0, / |a_h(p, q)| \leq C \|p\| \|q\|, \quad \forall p, q \in \mathcal{V}(h).$$

- Coercivité dans \mathcal{V}_h^k , pour $\alpha = \alpha_h = \sigma k^2 / h$:

$$\exists C > 0, / a_h(q, q) \geq C \|q\|^2, \quad \forall q \in \mathcal{V}_h^k.$$

Estimation en norme d'énergie, $p \in H^s$, $s \geq 2$

$$\|p - p_h\| \leq C \frac{h^{\mu-1}}{k^{s-\frac{3}{2}}} \left(\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|p\|_{s,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \mu = \min(k+1, s)$$

Estimation en norme L^2 , $p \in H^s$, $s \geq 2$, Ω convexe.

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq \left(C_1 \frac{h^{\mu-1}}{k^{s-\frac{3}{2}}} + C_2 \frac{h^\mu}{k^{s-1}} \right) \left(\sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|p\|_{s,E}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mu = \min(k+1, s)$

Observations

Optimalité en norme d'énergie et sous-optimalité en norme L^2 .

Tests numériques

$$-\Delta p = f \text{ dans } \Omega = (0, 1)^2, \quad p = \sin(\pi x) \cos(\pi y) + \cos(\pi x) \sin(\pi y)$$

$\alpha = \sigma/h$ avec $\sigma = 10$; \hookrightarrow sous-optimalité pour les ordres pairs.

h	\mathcal{P}_1		\mathcal{P}_2		\mathcal{P}_3	
	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux
1/4	4.696e-01	—	1.309e-01	—	2.764e-02	—
1/8	1.479e-01	1.67	2.889e-02	2.18	1.977e-03	3.81
1/16	3.975e-02	1.90	6.930e-03	2.06	1.278e-04	3.95
1/32	1.015e-02	1.97	1.713e-03	2.02	8.044e-06	3.99
1/64	2.552e-03	1.99	4.271e-04	2.00	5.033e-07	4.00

$\alpha = \sigma/h$ avec $\sigma = 1000$ \hookrightarrow on peut influencer la sous-optimalité.

h	\mathcal{P}_1		\mathcal{P}_2		\mathcal{P}_3	
	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux	erreur L^2	taux
1/4	9.121e-01	—	1.328e-01	—	1.834e-02	—
1/8	2.962e-01	1.62	1.678e-02	2.98	1.070e-03	4.10
1/16	7.943e-02	1.90	2.130e-03	2.98	6.198e-05	4.11
1/32	2.02e-02	1.98	2.706e-04	2.98	3.739e-06	4.05
1/64	5.071e-03	1.99	3.519e-05	2.94	2.304e-07	4.02

Constructions de la vitesse de Darcy

Démarche

- Étendre le formalisme aux méthodes mixtes.
- Interpréter la relation $a(u, v) + b(v, p) = l(v)$ comme une formule de reconstruction.
- Choisir les paramètres (par l'analogie entre formulation primale et duale.)

Première approche

chercher $u_h \in \Sigma_h^k$ tel que $\forall v_h \in \Sigma_h^k$,

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E K^{-1} u_h \cdot v_h \, dx + \sum_{e \in \xi'_h} \frac{1}{2\alpha} \int_e \llbracket u_h \cdot n_e \rrbracket \llbracket v_h \cdot n_e \rrbracket \, d\gamma \\ & + \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{1}{\alpha} \int_e (u_h \cdot n_e) (v_h \cdot n_e) \, d\gamma = - \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E v_h \cdot \nabla p_h \, dx + \sum_{e \in \xi'_h} \int_e \llbracket p_h \rrbracket \{v_h \cdot n_e\} \, d\gamma \\ & + \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e (p_h - p_D) (v_h \cdot n_e) \, d\gamma - \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{1}{\alpha} \int_e (g_N) (v_h \cdot n_e) \, d\gamma; \end{aligned}$$

Deuxième approche

Prendre dans la première approche, $\llbracket u \cdot n_e \rrbracket = \llbracket -(K \nabla p) \cdot n_e \rrbracket$

Proposition (Estimation - première approche)

$$\sum_{E \in \tau_h} \|u - u_h\|_{0,E}^2 \approx \mathcal{O}\left(\frac{h^{2\mu-2}}{k^{2s-3}}\right).$$

$$\sum_{e \in \xi'_h} \|[(u - u_h) \cdot n_e]\|_{0,e}^2 \approx \mathcal{O}\left(\frac{h^{2\mu-3}}{k^{2s-5}}\right).$$

$$\mu = \min(k + 1, s)$$

Observations

- Saut de la dérivée normale améliorable (par raffinement de maillage) même pour une approximation \mathcal{P}_1 de la pression.

$$-\nabla \cdot K \nabla p = f \text{ dans } \Omega, \quad p = p_D \text{ sur } \partial\Omega$$

$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, avec $\Omega_1 = (-1, 0) \times (-1, 1)$ et $\Omega_2 = (0, 1) \times (-1, 1)$. $K = 1$ dans Ω_1 et $K_2 = 10^{-4}$ dans Ω_2 . la solution exacte $p(x, y) = x^2 + y^2$. et données subséquentes.

Déroulement

Approximation \mathcal{P}_1 de la pression, avec un maillage uniforme fait de $2 \times 10 \times 10$ triangles. Sur chaque arête e , $\alpha = \sigma/|e|$, avec $\sigma = 10$.

Construction de la vitesse par trois approches :

- (a) simple différentiation locale : $\int_E K^{-1} u_h \cdot v_h \, dx = - \int_E v_h \cdot \nabla p_h \, dx \forall v_h \in \mathcal{P}_1(E)$
- (b) la seconde approche.
- (c) la première approche.

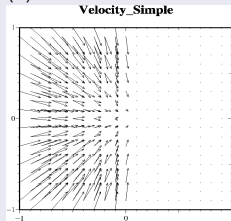
Observables

- (1) Vecteur vitesse de Darcy au milieu des arêtes.
- (2) Module de la vitesse de Darcy.

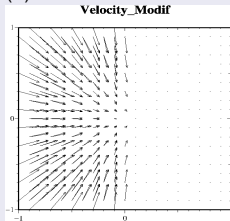
Tests numériques

Champs des vitesses de Darcy

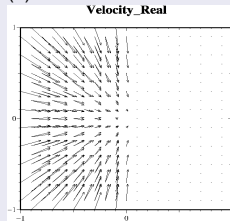
(a)



(b)

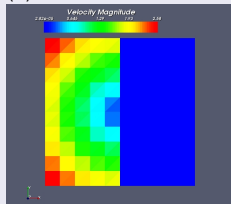


(c)

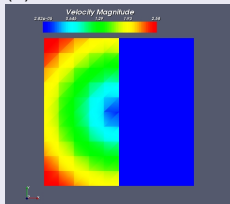


Module des vitesses de Darcy

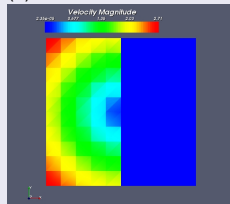
(a)



(b)



(c)



Projection locale $H(\text{div})$ comme reconstruction

But

Corriger une vitesse de Darcy pour rendre sa composante normale continue.

Projection $H(\text{div})$ locale (P. Bastian & B. Rivière 2003)

Soit u_h la vitesse de Darcy discontinue et u^* la vitesse de Darcy avec trace normale continue. Alors u^* peut s'obtenir par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{e_i} \{u^* \cdot n_{e_i}\} z = \int_{e_i} \{u_h \cdot n_{e_i}\} z \, d\gamma \quad \forall z \in P_{k-1}(e_i) \quad i = 1 \dots 3. \\ \int_E u^* \cdot \nabla w = \int_E u_h \cdot \nabla w \, dx, \quad \forall w \in P_{k-2}(E) \\ \int_E u^* \cdot \mathbf{S}(\phi) = \int_E u_h \cdot \mathbf{S}(\phi) \, dx, \quad \forall \phi \in M_k(E) \end{array} \right.$$

Ici, $\mathbf{S}(\phi) = (\partial_{x_2} \phi, -\partial_{x_1} \phi)$ $M_k(E) = \{\phi \in P_k(E) : \phi|_{\partial E} = 0\}$

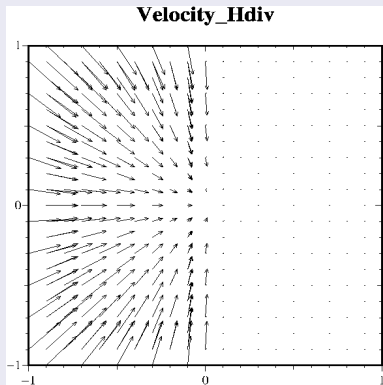
Proposition (projection locale appliquée au formalisme)

$\|(u^* - u) \cdot n_e\|_{0,e} \approx \mathcal{O}(h^\mu - \frac{3}{2})$, $\|(u^* - u_h)\|_{0,E} \approx \mathcal{O}(h^{\mu-1})$. où $\mu = \min(k+1, s)$

Observation

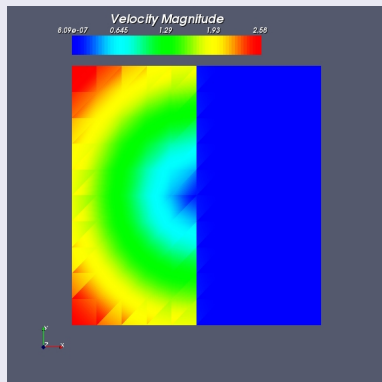
Amélioration sans détérioration. En particulier, préservation de la moyenne dans l'élément, faible erreur sur la norme L_2 dans l'élément.

Vitesse de Darcy : (a) champ au milieu des arêtes. (b) module



(a)

Vitesse de Darcy (\mathcal{P}_1) reconstruite par projection locale H(div) à partir d'une approximation \mathcal{P}_1 de la pression, pour un rapport de perméabilité $\frac{K_1}{K_2} = 10^{-4}$. A gauche son champ au milieu des arêtes de chaque élément, à droite son module.



(b)

- 1 Un formalisme Galerkin discontinu
 - Cas de l'équation de transport
 - Cas de l'équation de l'écoulement
 - Application

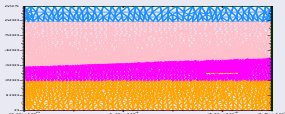
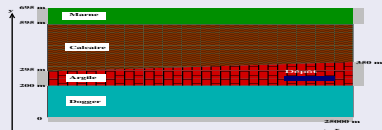
- 2 Méthode de zoom numérique
 - Introduction
 - Méthode
 - Application

- 3 Conclusion et perspectives



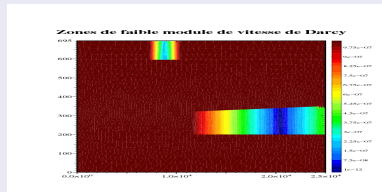
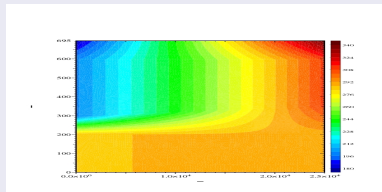
Hydrostatique (couplex 2D)

Géométrie (à gauche), maillage (à droite)

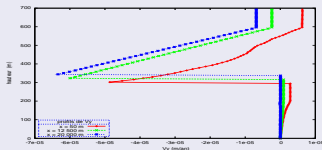
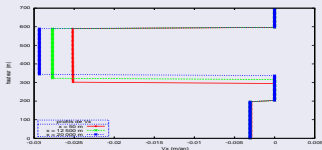


	Marne	Calcaire	Argile	Dogger
$K(m/an)$	$3.1535 \cdot 10^{-5}$	6.3072	$3.153 \cdot 10^{-6}$	25.2288

Isobares(gauche), faibles modules vitesse Darcy (droite)

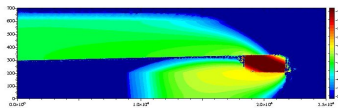


Profils des vitesses de Darcy : à gauche (v_x) à droite (v_y)

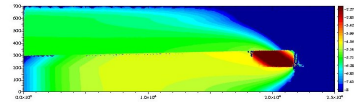


Transport de l'iode 129

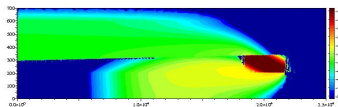
t = 40115 ans



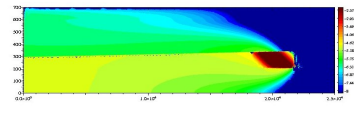
t = 70115 ans



t = 50115 ans



t = 100115 ans



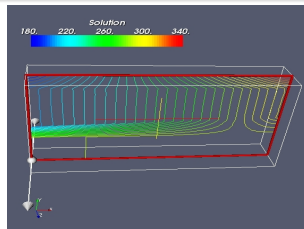
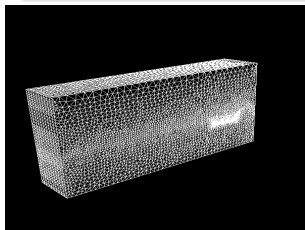
- Introduction
- Méthode et Analyse
- Applications

- 1 Un formalisme Galerkin discontinu
 - Cas de l'équation de transport
 - Cas de l'équation de l'écoulement
 - Application
- 2 Méthode de zoom numérique
 - Introduction
 - Méthode
 - Application
- 3 Conclusion et perspectives



On peut être amener à :

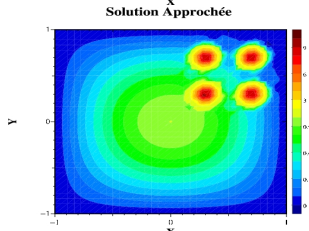
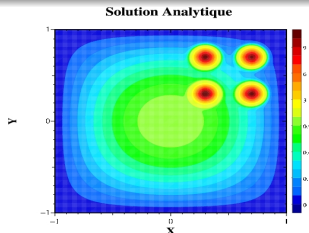
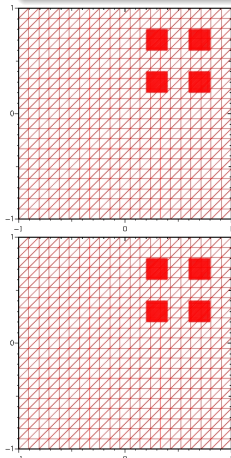
- 1 Capturer les détails.
- 2 Améliorer une solution calculée (cas multi-échelle).



Motivations

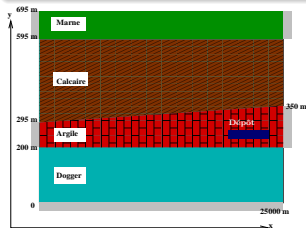
On peut être amené à :

- 1 Capturer les détails.
- 2 Améliorer une solution calculée (cas multi-échelle).

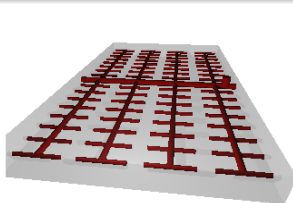


Cadre et algorithme formel

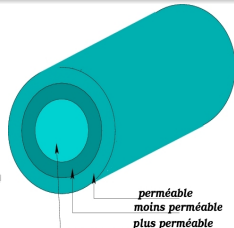
- On considère le cadre multi-échelle du site de stockage



échelle 1 :
(domaine entier)



échelle 2 :
(le dépôt dans le domaine)



échelle 3 :
(galerie dans le dépôt)

Objectif

Trouver un moyen

- pour résoudre les problèmes d'écoulement et de transport des radioéléments
- en prenant en compte une fuite au niveau de la galerie

Algorithme formel

- 1 **Etape de descente** : Effectuer des calculs hydrodynamiques dans les domaines emboîtés jusqu'à capture du détail cherché.
- 2 **Etape de remontée** : Remonter par des calculs successifs en résolvant le problème de transport des radioéléments, jusqu'à recouvrir le domaine tout entier.

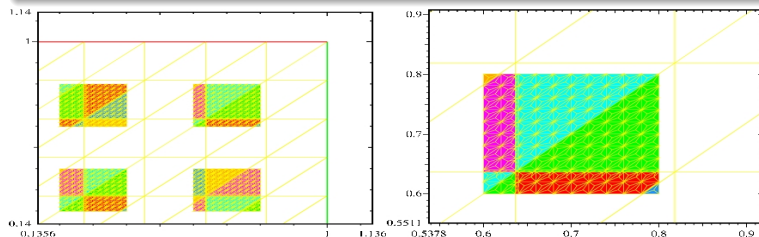
Faisabilité

On peut par exemple

- 1 **Etape de descente** : Coupler les méthodes
 - LDC (*Local Defect Correction*)([Hackbush, 1984](#))
 - aux méthodes multigrilles.
- 2 **Etape de remontée** :
 - Si le maillage est structuré, utiliser les méthodes LDC instationnaires ([Hemker et al. 2002](#), [Minero et al. 2006](#))

Difficultés

- Gestion des maillages
- Résolution de l'équation de transport



Solution

- Méthode Chimère (pour la gestion des maillages)
- Méthode Galerkin discontinue (pour le transport)

- 1 Un formalisme Galerkin discontinu
 - Cas de l'équation de transport
 - Cas de l'équation de l'écoulement
 - Application
- 2 Méthode de zoom numérique
 - Introduction
 - **Méthode**
 - Application
- 3 Conclusion et perspectives



Étape de descente

- 1 INITIALISER
 - Hydrodynamique sur un maillage grossier du domaine
- 2 RÉPÉTER
 - Afficher la solution
 - Définir le zoom
 - Nouveau calcul
- 3 JUSQU'À
 - Capture du détail cherché

Étape de remontée

- 1 INITIALISER
 - Transport dans le dernier zoom
- 2 RÉPÉTER
 - Agrandir le domaine
 - Transport (condition initiale = solution précédent domaine)
- 3 JUSQU'À
 - Recouvrir le domaine entier

- Transport dans les zooms avec condition de sortie libre
- Test d'arrêt mesuré par la variation de la solution au bord

Méthode Chimère (HSDM)

On pose $V = V_1 + V_2$ et on cherche $u = \phi_1 + \phi_2$

par $a(\phi_1 + \phi_2, w_1 + w_2) = l(w_1 + w_2)$

Selon l'algorithme :

Initialisation : $\phi_1^0 = \phi_2^0 = 0$

Itération jusqu'à convergence :

$a(\phi_1^{m+1} + \phi_2^m, w_1) = l(w_1)$

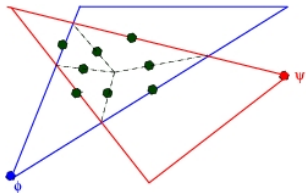
$a(\phi_1^m + \phi_2^{m+1}, w_2) = l(w_2)$

Difficulté

Evaluer dans le cadre discret : $a(\phi_2^m, w_1)$ et $a(\phi_1^m, w_2)$

Une solution

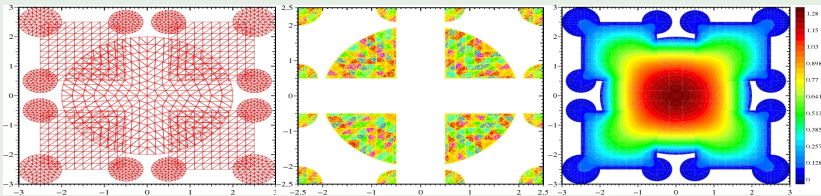
Utiliser l'intersection de maillage.



Proposition

La formule de quadrature ci-contre évalue exactement le produit de deux fonctions P_1 sur l'intersection des triangles .

Application : $-\Delta u = 1$ dans Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$



Inconvénients

Difficile à étendre en 3D.

Proposition (Formule de quadrature)

$$a_h(u, v) = \sum_{k=1}^{N_h} \sum_{j=1..3} \frac{|T_k^1|}{3} \kappa \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{l_{\Omega^1} + l_{\Omega^2}} \Big|_{\xi_{jk}^1} + \sum_{k=1}^{N_h} \sum_{j=1..3} \frac{|T_k^1|}{3} \kappa \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{l_{\Omega^1} + l_{\Omega^2}} \Big|_{\xi_{jk}^2}$$

question

Contrôlons-nous l'erreur ?

Proposition (Propriétés de la forme bilinéaire)

- Coercivité (Brezzi et al. 01)
- Continuité (O.Pironneau et J.-B. A., 05)

Proposition

Si les sommets de τ_i sont internes aux éléments de τ_j , alors la solution discrète est unique et

Question

Le zoom est-il une correction (une amélioration) ?

Proposition (zoom comme correction)

$$\|\phi_h^2\|_{1,\Omega_2} \leq C(H + h)$$



question

Jusqu'à combien de zoom récursifs peut-on aller ?

zoom récursif

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\kappa \nabla(\phi_H^1 + \phi_h^2 + \phi_{\bar{h}}^3) \nabla(w_H^1 + w_h^2 + w_{\bar{h}}^3)) \\ &= \int_{\Gamma_n} g(w_H^1 + w_h^2 + w_{\bar{h}}^3) \quad \forall w_H^1 \in V_H, w_h^2 \in V_h^2, w_{\bar{h}}^3 \in V_{\bar{h}}^3 \end{aligned}$$

Proposition

$$\|\phi_{\bar{h}}^3\| \leq \|\phi_{\bar{h}}^3 + \phi_h^2 + \phi_H^1 - \phi\| + \|\phi_h^2 + \phi_H^1 - \phi\| \leq C(\varepsilon + \varepsilon')$$

Question

A-t-on le droit d'effectuer des calculs locaux dans l'étape de la remontée ? Si oui comment ?

Rappel de l'équation

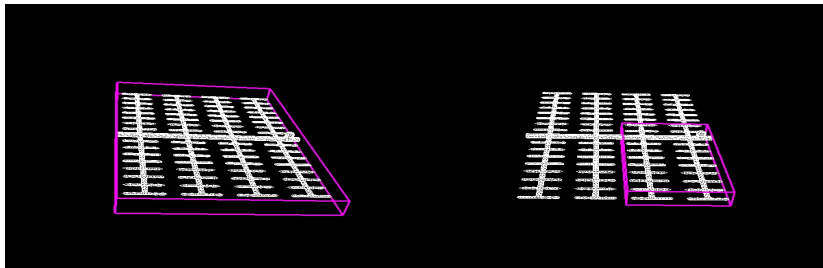
$$\alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \beta c + u \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\nu \nabla c) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T)$$
$$c(\cdot, 0) = c^0 \text{ in } \Omega, \quad c \text{ ou } \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Proposition

Soit c la solution dans un domaine ω et soit (\tilde{c}) la solution dans $\tilde{\Omega}$ contenant Ω . Alors

$$\|\tilde{c} - c\| \leq C_1 |c^0|_{\infty} \frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{|x-x_D|^2}{ct} - \beta t}$$

- 1 FreeFEM3D
 - Solveur d'EDPs.
 - Maille les surface d'objets provenant de la (CSG).
 - Contient un solveur Éléments finis discontinus présentés.
- 2 Medit
 - Visualiser la solution.
 - Définir la zone de zoom.

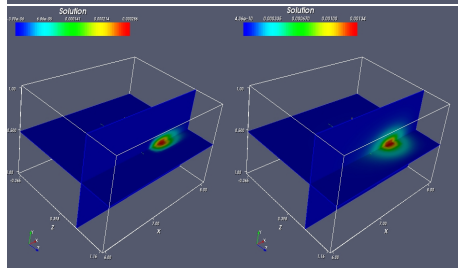
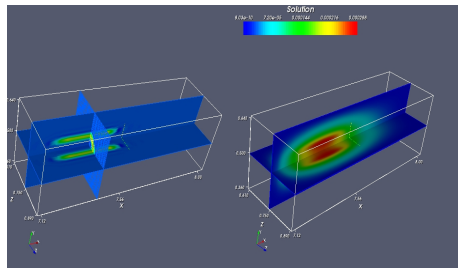
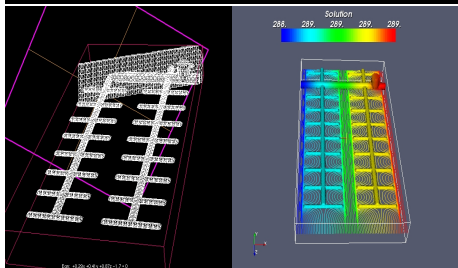
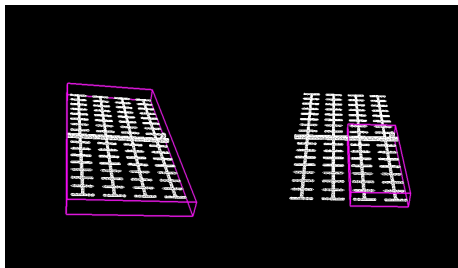


- 1 Un formalisme Galerkin discontinu
 - Cas de l'équation de transport
 - Cas de l'équation de l'écoulement
 - Application
- 2 Méthode de zoom numérique
 - Introduction
 - Méthode
 - Application
- 3 Conclusion et perspectives

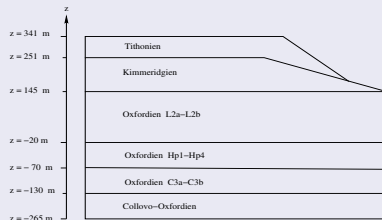
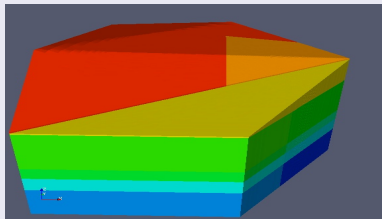


- Application complexe 2D étendue à 3D.
- Application complexe 3D

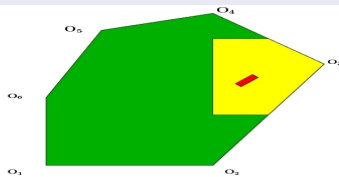
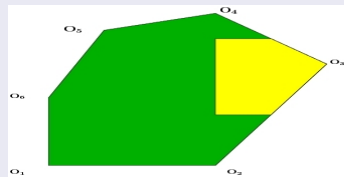
Couplex 2D en version 3D



Géométrie



Coupes horizontales : Cox (à droite)



constat

Taille des données trop importantes.

Pas d'information sur la solution exacte.

↔ Utiliser au moins deux méthodes de résolution.

Solution

Exploiter les données du problème.

Utiliser une décomposition par couche.

Avantage

On a une estimation sur la solution du problème global.

Problème global (Décomposition par couches)

$$-\nabla \cdot (K \nabla \phi) = 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_1 = \Gamma, K|_{\Omega_i} = K_i, \\ \phi = \phi_D \quad \text{sur } \partial\Omega_D, \quad K \nabla \phi \cdot n = g_N \quad \text{sur } \partial\Omega_N.$$

Compatibilité

$$\phi_0 = \phi_1, \quad \text{sur } \Gamma \quad K_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial n_0} = -K_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1}, \quad \text{sur } \Gamma$$

↔ Résolution successive possible si $K_0 \gg K_1$.

Étape 1 : Neumann dans Ω_0

$$-\Delta \phi_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial n_0} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \\ + \text{CL sur } \partial\Omega_0 \cap \Omega$$

Étape 2 : Dirichlet dans Ω_1

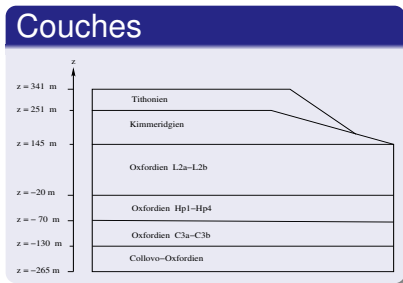
$$-\Delta \phi_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \\ \phi_1 = \phi_0, \quad \text{sur } \Gamma \\ + \text{CL sur } \partial\Omega_1 \cap \Omega$$

Proposition

Soit ϕ_c telle que $\phi_c \equiv \phi_i$ sur $\Omega_i, i = 0, 1$. On a : $\|\phi_c - \phi\|_{1,\Omega} \approx \mathcal{O}\left(\frac{K_1}{K_0}\right)$.

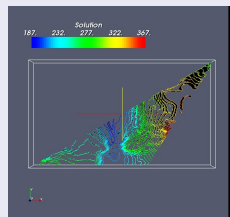
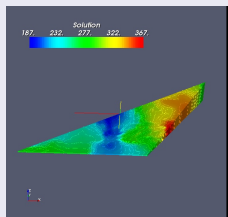
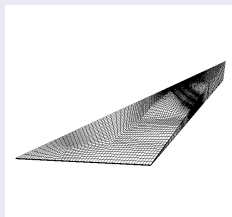
Organisation du calcul hydrodynamique par couches

- 1 Résolution dans le domaine 5, correspondant au **Tithonien**
- 2 **Idem** pour le domaine 4, correspondant au **Kimmeridgien non recouvert**.
- 3 Résolution dans le domaine 2, correspondant au **L2a-L2b et Hp1-Hp2**.
- 4 Résolution dans le domaine 3, correspondant au **Kimmeridgien recouvert**.
- 5 Résolution dans le domaine 1, correspondant au **C3a-C3b et Cox**.

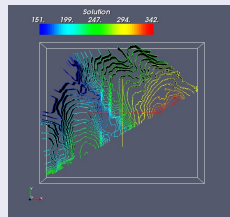
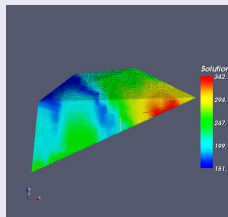
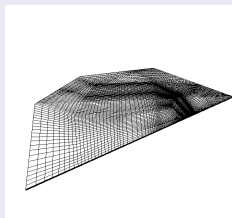


Couplex 3D

Kimmeridgien non couvert. max ≈ 366 , min ≈ 187

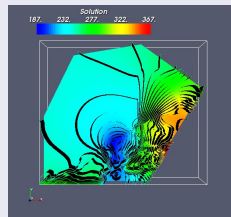
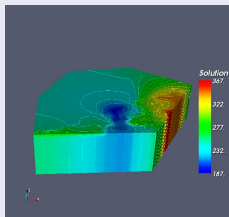
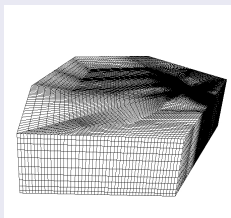


Tithonien. max ≈ 342 , min ≈ 151

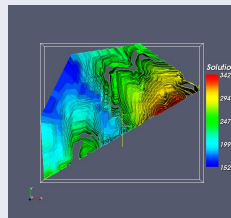
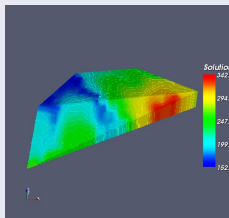
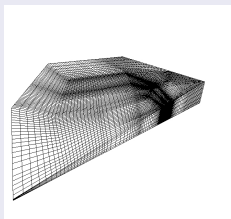


Couplex 3D

L2a-L2b et Hp1-Hp2. $\max \approx 366$, $\min \approx 187$

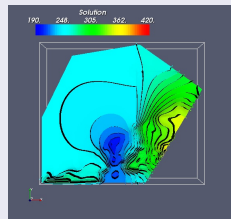
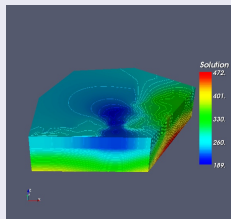
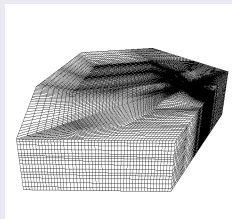


Kimmeridgien recouvert. $\max \approx 342$, $\min \approx 152$

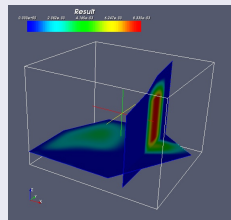
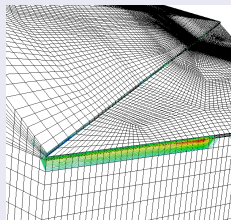
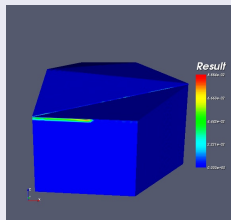


Couplex 3D

L3a-L3b et Cox. max ≈ 471 , min ≈ 189

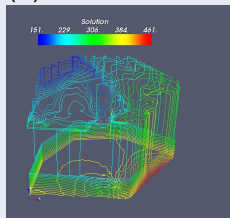


$|P_{\text{global}} - P_{\text{globalcouches}}| / \|P\|_{\infty, \Omega} (\approx 8\%)$

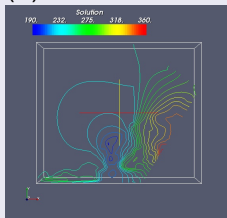


Isocourbes : (a) surface, (b) $z = -100$ m, (c) $x = 821000$ m

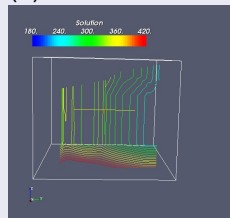
(a)



(b)



(c)



- 1 Un nouveau formalisme Galerkin discontinu pour l'équation de transport des radionucléides est présenté
 - 1 Il est stable pour tout ordre de polynôme sans limitation de pente
 - 2 Conditions CFL abstraite sur le pas de temps proposée.
- 2 Une nouvelle formulation DG pour l'équation de l'écoulement est proposé
 - 1 Il introduit et contrôle une double stabilisations par les sauts de la pression et de la composante normale de son gradient.
 - 2 Il Facilite la détermination de la vitesse de Darcy.
- 3 Un algorithme de zoom numérique est proposé ainsi que des outils pour sa mise en oeuvre.
 - 1 Les logiciels libres `FreeFEM3D` et `Medit` rendent sa mise en oeuvre conviviale.
 - 2 Formules de Quadrature approchées pour la méthode chimère est analysées.



- 1 Étendre le formalisme à d'autres types d'équations : Navier-Stokes, couplage Darcy-Stokes.
- 2 Analyser l'effet de la constante de stabilisation et comparer le nouveau formalisme pour les problèmes elliptiques aux formalismes existants.
- 3 Analyser l'algorithme du zoom dans un cadre général.
- 4 Intégrer l'outil de visualisation au solveurs d'EDPs pour plus de convivialité.
- 5 Résoudre le problème Couplex 3D complet (recours au parallélisme).
- 6 Appliquer au problème Couplex-Gaz.

MERCI !

Soit G la fonction de Green du problème alors,

$$c(x, t) = \int_{\Omega} G(x - y, t) c^0(y) \delta y \quad |G(x - y, t)| \leq \frac{C}{t^{3/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

chercher $p_h \in V_h, u_h \in W_h$, tels que $\forall q_h \in V_h, v_h \in W_h$,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E \left(K^{-1} u_h \cdot v_h + v_h \cdot \nabla p_h - u_h \cdot \nabla q_h \right) dx \\
 & + \sum_{e \in \xi'_h} \int_e \left(\{u_h \cdot n_e\} [q_h] - \{v_h \cdot n_e\} [p_h] \right) d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e \left((u_h \cdot n_e) q_h - (v_h \cdot n_e) p_h \right) d\gamma \\
 & + \sum_{e \in \xi'_h} \frac{\sigma}{2|e|} \int_e [p_h] [q_h] d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^D} \frac{\sigma}{|e|} \int_e p_h q_h d\gamma \\
 & + \sum_{e \in \xi'_h} \frac{|e|}{2\sigma} \int_e [u_h \cdot n_e] [v_h \cdot n_e] d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{|e|}{\sigma} \int_e (u_h \cdot n_e) (v_h \cdot n_e) d\gamma \\
 = & \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int_E f q_h dx + \sum_{e \in \xi_h^N} \int_e (g_N) q_h d\gamma - \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e (v_h \cdot n_e) p_D d\gamma \\
 & + \sum_{e \in \xi_h^D} \frac{\sigma}{|e|} \int_e (p_D) q_h d\gamma - \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{|e|}{\sigma} \int_e (g_N) (v_h \cdot n_e) d\gamma.
 \end{aligned}$$

(1)



$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \tau_h} \int_E K \nabla p \cdot \nabla q \, dx \\
& + \sum_{e \in \xi'_h} \int_e [p] \{ (K \nabla q) \cdot n_e \} \, d\gamma - \sum_{e \in \xi'_h} \int_e [q] \{ (K \nabla p) \cdot n_e \} \, d\gamma \\
& + \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e p (K \nabla q) \cdot n_e \, d\gamma - \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e q (K \nabla p) \cdot n_e \, d\gamma \\
& + \sum_{e \in \xi'_h} \frac{\alpha}{2} \int_e [p][q] \, d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^D} \alpha \int_e p q \, d\gamma \\
& + \sum_{e \in \xi'_h} \frac{1}{2\alpha} \int_e [(K \nabla p) \cdot n_e][(K \nabla q) \cdot n_e] \, d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{1}{\alpha} \int_e (K \nabla p) \cdot n_e (K \nabla q) \cdot n_e \, d\gamma. \\
& = \sum_{E \in \tau_h} \int_E f q \, dx + \sum_{e \in \xi_h^N} \int_e (g_N) q \, d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e p_D (K \nabla q) \cdot n_e \, d\gamma \\
& + \sum_{e \in \xi_h^D} \int_e \alpha p_D q \, d\gamma + \sum_{e \in \xi_h^N} \frac{1}{\alpha} \int_e g_N (K \nabla q) \cdot n_e \, d\gamma
\end{aligned} \tag{2}$$