Avertissements importants :
– *Les appareils électroniques (téléphones compris) et les documents sont interdits.*
– *Les exercices sont indépendants, le barème (sur 30) est indicatif.*
– *Les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière rigoureuse.*
– *Si un résultat du cours est utilisé, il doit être clairement énoncé.*

Exercice I (12 points). Soit l'intégrale simple

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a $\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x\,dy}{1+xy}$.

2. Enoncer le théorème de Fubini pour le calcul de l'intégrale double d'une fonction continue f sur un pavé $[a,b]\times[c,d]$ de $\mathbb{R}^2$.

3. En déduire que $I = \iint_D \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2)(1+xy)}$ où D est le carré $[0,1]^2$.

4. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ et $g(x,y) = f(x,y)+f(y,x)$. Montrer que $2I = \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$.

5. En déduire que $2I = \iint_D \frac{(x+y)\,dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

6. Montrer alors que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice II (12 points). Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(x,y)=0$ si $x=0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$.

3. Les dérivées partielles sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? De classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

5. Enoncer le théorème de Schwarz.

6. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice III (6 points). Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On s'intéresse à la recherche d'extrema locaux de f sur la sphère $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

1. On considère une paramétrisation de S donnée par $\gamma : t\in\mathbb{R}\mapsto(\cos t,\sin t)$. Rappeler l'expression du vecteur tangent à S au point $(x,y)=(\cos t,\sin t)$.

2. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $g(t) = f(\cos t,\sin t)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que si $(x_0,y_0) = (\cos t_0,\sin t_0)$ est un extremum local de f sur S, alors $g'(t_0)=0$.

3. Rappeler la formule de dérivation de la fonction composée $t\mapsto(f\circ\gamma)(t)$.

4. Déduire des deux questions précédentes que

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t_0,\sin t_0)\sin t_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t_0,\sin t_0)\cos t_0 = 0.$$

5. Etablir alors que le vecteur $\nabla f(x_0,y_0)$ est orthogonal au vecteur tangent à S en (x_0,y_0). En déduire l'existence d'un $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}.$$

Elèments de correction de l'examen de juin 2016

Exercice I.

1. $\int_0^1 \frac{x\,dy}{1+xy} = [\ln(1+xy)]_{y=0}^{y=1} = \ln(1+x)$.

2. Cours.

3. La fonction $(x,y) \mapsto \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ est continue sur le carré $D=[0,1]^2$. Le théorème de Fubini implique alors que

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^1 \frac{x\,dy}{1+xy}\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln(1+x)\,dx = I.$$

4. Toujours le théorème de Fubini montre que

$$\iint_D f(y,x)\,dx\,dy = \iint_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+y^2)(1+xy)} = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\int_0^1 \frac{y\,dx}{1+xy}\right)dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\ln(1+y)\,dy = I,$$

d'où $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy = 2I$.

5. On calcule, pour tout $(x,y)\in D$,

$$\begin{aligned} g(x,y) = \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)} &= \frac{x(1+y^2)+y(1+x^2)}{(1+y^2)(1+x^2)(1+xy)} \\ &= \frac{(x+y)(1+xy)}{(1+y^2)(1+x^2)(1+xy)} = \frac{(x+y)}{(1+y^2)(1+x^2)}, \end{aligned}$$

puisque $1+xy \neq 0$.

6. Encore une fois le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} 2I = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\int_0^1 \frac{x+y}{1+x^2}\,dx\right)dy &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + y\arctan x\right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{y\pi}{4}\right]_{x=0}^1 dy = \left[\frac{\ln 2}{2}\arctan y + \frac{\pi}{8}\ln(1+y^2)\right]_0^1 = \frac{\pi\ln 2}{4}. \end{aligned}$$

Exercice II.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues. Soit maintenant $y_0 \in \mathbb{R}$, vérifions la continuité de f en $(0,y_0)$. Si $(x,y)\to(0,y_0)$ avec $x\neq 0$, alors $|f(x,y)| = x^2|\sin(y/x)| \le x^2 \to 0 = f(0,y_0)$ quand $(x,y)\to(0,y_0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Si $x \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si $x=0$, alors $\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = h\sin\left(\frac{y}{h}\right) \to 0$ quand $h\to 0$ de sorte que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0.$$

De même $\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = 0 \to 0$ quand $h \to 0$ ce qui montre que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0.$$

3. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont clairement continues sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Etudions la continuité en $(0, y_0)$ pour $y_0 \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, comme
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq |x| \to 0,$$
quand $(x, y) \to (0, y_0)$, on a que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)$ et donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, y_0)$.
Si $y_0 \neq 0$, alors $y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ n'admet pas de limite ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en ce point. Si en revanche $y_0 = 0$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 2|x| + |y| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \to 0.$$
Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

4. Comme f admet des dérivées partielles sur $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cup \{(0, 0)\}$ qui sont continues, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}) \cup \{(0, 0)\}$.
Etudions la différentiabilité de f en $(0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0$, si f était différentiable en $(0, y_0)$, alors nécessairement $df(0, y_0)$ serait l'application linéaire nulle. Calculons alors
$$\left|\frac{f((0, y_0) + (h, k)) - f(0, y_0) - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| = \left|\frac{h^2 \sin\left(\frac{y_0 + k}{h}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$$
quand $(h, k) \to (0, 0)$. Ceci montre bien que f est différentiable sur $\{0\} \times \mathbb{R}^*$. Par contre f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble puisqu'on a vu à la question 2 que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en ce point.

5. Cours.

6. Pour $y \neq 0$, on calcule
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = 0 \to 0$$
quand $y \to 0$, ce qui montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 0$. Ensuite, pour $x \neq 0$,
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = 1 \to 1$$
quand $x \to 0$, ce qui montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ le théorème de Schwarz permet de conclure que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0, 0)$.

Exercice III.

1. Le vecteur tangent est donné par $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si $(x_0, y_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$ est un extremum local de f sur S, alors t_0 est un extremum local de g sur $\mathbb{R}$ et on a alors la condition nécessaire $g'(t_0) = 0$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

4. On remplace dans l'expression précédente.

5. Les vecteurs $\nabla f(\cos t_0, \sin t_0)$ et $(-\sin t_0, \cos t_0)$ sont orthogonaux. Par conséquent $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal au vecteur tangent à S en (x_0, y_0). Autrement dit, $\nabla f(x_0, y_0)$ est colinéaire au vecteur $(-\sin(t_0 + \pi/2), \cos(t_0 + \pi/2)) = (\cos t_0, \sin t_0) = (x_0, y_0)$.