Avertissements importants :
– *Les appareils électroniques (téléphones, tablettes, ordinateurs, etc...) et les documents sont interdits.*
– *Les exercices sont indépendants, le barème (sur 25) est indicatif.*
– *Les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière rigoureuse.*
– *Si un résultat du cours est utilisé, il doit être clairement énoncé.*

Questions de cours (4 points). Traitez deux des trois questions suivantes :

1. Enoncer la formule de Taylor pour une fonction de deux variables.

2. Enoncer le théorème de Schwarz pour une fonction de deux variables.

3. Donner la définition d'un arc orienté de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice I. (8 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{xy(x^2-2y^2)}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que l'on peut prolonger f en $(0,0)$ en une fonction, encore notée f, continue en $(0,0)$. Quelle est alors la valeur de $f(0,0)$?

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et les calculer.

3. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point (x,y) distinct de $(0,0)$.

4. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$? Expliquer.

5. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Calculer $\displaystyle\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice II. (7 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = -x^2y + \frac{y^2}{2} + y$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Classifier les points critiques.

3. On considère l'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x^2+y^2 = 1\}$. Montrer que F est fermé.

4. Montrer que f admet quatre extrema sur F dont on précisera la nature.

Exercice III. (6 points) Soient l'ensemble ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Pour tout $(x,y) \in U$, on pose $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ où $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2. On rappelle que le Laplacien de f est défini, pour tout $(x,y) \in U$ par $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. Montrer que pour tout $(x,y) \in U$,

$$\Delta f(x,y) = g''(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. En déduire que $\Delta f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in U$ si et seulement si $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rg'(r)) = 0$ pour tout $r > 0$.

4. Montrer alors que $\Delta f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in U$ si et seulement si

$$f(x,y) = a\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + b \quad \text{pour tout } (x,y) \in U,$$

où a et b sont des réels.

Exercice I. **1.** Par exemple, $f(x,y) \leq x^2 + y^2$ donc on peut poser $f(0,0) = 0$.

2. $(f(x,0) - f(0,0))/x \leq r$, avec notation polaire, donc $\partial_x f(0,0) = 0$. Idem pour $\partial_y f(0,0) = 0$.

3. $\partial_x f(x,y) = \dfrac{x^4 y + 5x^2 y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2}$, $\partial_y f(x,y) = \dfrac{x^5 - 7x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.

4. Il faut étudier la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$. Par exemple, $|\partial_x f(x,y)| \leq 8r$, donc continuité. Pareil pour $\partial_y f$.

5. $\displaystyle\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin\theta(1 - 3\sin^2\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{8}$.

Exercice II. **1.** $(0,0) = \nabla f(x,y) = (-2xy, -x^2+y+1)$ implique que $(x,y) = (0,-1)$ ou $(x,y) = (\pm 1, 0)$.

2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier

$$D^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres, 2 et 1, sont strictement positives. Le point critique $(0,-1)$ est donc un minimum local. D'autre part,

$$D^2 f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour ces deux points critiques, les valeurs propres sont $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ (l'une strictement positive et l'autre strictement négative). Les deux points critiques $(\pm 1, 0)$ sont donc des points selles.

3. $F = g^{-1}(\{0\}) \cap ([0,+\infty[\times \mathbb{R})$ où $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ est continue et $\{0\}$ est fermé. Par conséquent $g^{-1}(\{0\})$ est fermé. Enfin, F est fermé comme intersection de deux fermés.

4. On remarque tout d'abord que $(x,y) \in F$ si et seulement si $x = \sqrt{1-y^2}$ avec $-1 \leq y \leq 1$. Donc la restriction de f à F est donnée par la fonction $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(y) = f(\sqrt{1-y^2}, y) = y^3 + \frac{y^2}{2}$. Une étude de fonction montre que h est croissante sur $[-1,-1/3]$ décroissante sur $[-1/3, 0]$ et croissante sur $[0,1]$ avec

$$h(-1) = -1/2, \quad h(-1/3) = 1/36, \quad h(0) = 0, \quad h(1) = 3/2.$$

Par conséquent, $(0,-1)$ est un point de minimum global de f sur F ; $(0,1)$ est un point de maximum global de f sur F ; $(2\sqrt{2}/3, 1/3)$ est un point de maximum local de f sur F ; et $(1,0)$ est un point de minimum local de f sur F.

Exercice III.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = g''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{x^2+y^2} + g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g''(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y^2}{x^2+y^2} + g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

2. On somme, et on obtient effectivement,

$$\Delta f(x,y) = g''(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{g'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. En posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on obtient que $\Delta f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in U$ ssi $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} = 0$ pour tout $r > 0$ ssi

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rg'(r)) = g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) = 0 \qquad \text{pour tout } r > 0.$$

4. On intègre l'équation différentielle précédente : pour tout $r > 0$, on a $rg'(r) = a$, soit $g'(r) = \frac{a}{r}$ puis enfin $g(r) = a \ln r + b$. Finalement on obtient que

$$f(x,y) = a \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + b \qquad \text{pour tout } (x,y) \in U.$$