Problèmes vectoriels

Exercice 1 Méthode de point fixe

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} -x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{5}{4} \\ \\ -\dfrac{1}{2}x + y^2 + \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les points fixes de ϕ. Ces points fixes sont-ils attractifs ?
2. Soit B le point non attractif de ϕ. Montrer que ϕ possède un inverse local en B. Le point B est-il attractif pour l'inverse ?

Exercice 2 Racine carrée d'une matrice symétrique positive
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique semi-définie positive, c'est-à-dire telle que

$$A^T = A, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}^+.$$

1. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et semi-définie positive telle que $A = S^2$.
2. On montre ici l'unicité de cette matrice S.
   Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et semi-définie positive telle que $A = S^2$.
   b) Montrer que $\ker A = \ker S$.
   c) Montrer A et S ont les mêmes sous-espaces propres. En déduire que S est unique.

Remarque: Cette matrice S est appelée la racine carrée de la matrice A.

Exercice 3 Méthode de Newton pour la recherche de racines carrées de matrices
On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.
2. Montrer que la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et soit $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la fonction définie par $F(X) = X^2 - A$. Déterminer la différentielle de F en X.
4. Écrire l'algorithme de Newton pour F.

Exercice 4 Théorème de Gerschgorin-Hadamard
Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose

$$\gamma_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

et on note D_i le disque $D_i = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid \ |z - a_{i,i}| \ \leq \gamma_i \Big\}$.

a) Montrer que $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

b) Montrer qu'une matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|,$$

est inversible.

Exercice 5 Méthode de Jacobi

On considère le système linéaire $Ax = b$ d'inconnue x, de matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et ne contenant pas de 0 sur la diagonale, de second membre $b \in \mathbb{R}^n$ et d'unique solution $a \in \mathbb{R}^n$. On note $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ et $N = D - A$.

1) Montrer que a est la seule solution d'une équation de la forme $x = Jx + D^{-1}b$, où l'on exprimera J en fonction de D et N.

2) Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Pour $p \geq 0$, on définit par récurrence $(x^{(p)})$ par

$$x^{(p+1)} = Jx^{(p)} + D^{-1}b.$$

On note l'erreur $e^{(p)} = x^{(p)} - a$ pour tout p. Exprimer $e^{(p)}$ en fonction de J et $e^{(0)}$.

3) Dans cette question on suppose A à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

a) Expliquer pourquoi la méthode de Jacobi est bien définie.

b) Calculer $\|J\|_\infty$ et en déduire que la méthode de Jacobi converge, c'est-à-dire que $\lim_{p \to \infty} e^{(p)} = 0$.

4) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer la matrice J_α associée à A_α, et calculer son rayon spectral.

b) Pour quelles valeurs de α a-t-on $\varrho(J_\alpha) < 1$?

c) Montrer que la méthode de Jacobi converge pour ces valeurs de α.