Approximation et interpolation de fonctions

I. Approximation par les séries trigonométriques

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$, prolongée par imparité et 2π- périodicité.

1. Représenter le graphe de f et déterminer son développement en série de Fourier.
2. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \le \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 3 Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on considère les coefficients de Fourier de f

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x, \qquad \forall k \in \mathbb{K},$$

et on note $S_n f$ la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}$ de la série de Fourier de f associée.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varrho_n := \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. En utilisant la décroissance de la fonction $\phi : x \mapsto 1/x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $\varrho_n \le 1/n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Dans cette question, on suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
   (a) À l'aide d'intégrations par partie, établir une relation entre $c_k(f)$ et $c_k(f'')$ pour tout $k \in \mathbb{K}^*$.
   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{K}} |c_k(f)|$ est convergente.
   (c) Établir une majoration de $\|f - S_n f\| := \displaystyle\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - S_n f(x)|$ en fonction de ϱ_n et de f''.
   (d) En déduire que la suite $(n\, \|f - S_n f\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
3. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par $g(x) = x^2$ et étendue sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.
   (a) Calculer $c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{K}$.
   (b) Montrer que $(S_n g)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.
   (c) En calculant $g(\pi)$ de deux façons différentes, déterminer la valeur de ϱ_0.
   (d) Peut-on faire le même raisonnement qu'en 2.(d) pour montrer que $(n\, \|g - S_n g\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ?

II. Approximation polynômiale

Exercice 4 Polynômes de meilleur approximation
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ polynômiales de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé contenant $\mathcal{P}_n$. Montrer que pour tout $f \in E$ il existe $p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$\|f - p_n\| = \min\{\|f - q\|, \quad q \in \mathcal{P}_n\}.$$

   Un tel polynôme est appelé polynôme de meilleur approximation (PMA) de f dans $\mathcal{P}_n$ pour la norme $\|\cdot\|$.
2. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

   Quels sont les PMA de f dans $\mathcal{P}_1$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(]-1,1[)}$? Qu'en déduire concernant l'unicité du PMA en général ?
3. Que dire si E est un espace de Hilbert ?

Exercice 5 Polynômes de Bernstein.
On cherche à approcher une fonction continue f par un polynôme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $0 \le j \le n$, on définit les polynômes de Bernstein par :

$$B_j(x) = C_j^n x^j (1 - x)^{n-j}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $B_j(x) \ge 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=0}^{n} (j - nx)^2 B_j(x) = nx(1 - x).$$

2. Soit $f \in C([0, 1])$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) B_j(x).$$

   Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \le \sum_{j=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j(x).$$

3. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|}{2n\delta^2}$$
et en déduire que la suite (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
4. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Montrer que
$$\|f - P_n\|_{\infty,[0,1]} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

III. Interpolation polynômiale

Exercice 6 Polynômes de Lagrange et de Hermite.
Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction de classe $\mathbb{C}^3$ sur [0,1]. On note $a = f(0)$, $b = f(1)$ et $M = \sup_{x \in]0,1[} |f'''(x)|$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points $0, \epsilon$ et 1.
2. On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M et ϵ.
3. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que, pour chaque $x \in [0,1]$,
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$
4. Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :
$$P(0) = a, \qquad P'(0) = f'(0), \qquad P(1) = b.$$
Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f relativement aux points 0, 1, et aux entiers 1, 0*, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.
5. On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M. Pour cela, on pourra considérer la fonction ϕ définie par $\phi(t) = f(t) - P(t) - \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2(x-1)} t^2(t-1)$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\phi'''(\xi) = 0$.

Exercice 7 Points de Tchebychev.

Soit P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f définie sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, relativement à $n+1$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de cet intervalle. On rappelle l'estimation de l'erreur d'interpolation
$$\begin{aligned} E_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_n), \text{ avec } \pi_{n+1}(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n). \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $u \in [-1,1]$, $t_n(u) = \cos(n \operatorname{acos} u)$ est un polynôme de degré n. Trouver la formule de récurrence qui permet de calculer $t_n(u)$.
2. Trouver les racines $u_i \in [-1,1]$, $0 \leq i \leq n$, du polynôme t_{n+1} (points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n).
3. Montrer que le polynôme de base de Lagrange ℓ_i associé à u_i est donné par
$$\ell_i(u) = (-1)^i \frac{t_{n+1}(u)}{(u - u_i)} \frac{\sqrt{1 - u_i^2}}{(n+1)}.$$
Calculer l'erreur d'interpolation.
4. Les points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n de l'intervalle $[a,b]$, notés x_i, sont définis comme les images des points u_i par une bijection affine $u \mapsto x$ qui envoie -1 en a et $+1$ en b. Montrer que
$$\|\pi_{n+1}\| = \sup_{x \in [a,b]} |\pi_{n+1}(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$
5. *Interpolation aux points de Tchebychev d'une fonction paire.*
   a) Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction paire f relativement aux zéros du polynôme de Tchebychev t_5 est pair.
   b) Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = 1/(1+x^2)$. En posant $u = x^2$, montrer que le calcul du polynôme d'interpolation $P(x)$ de f relativement aux zéros de t_5 peut se ramener au calcul d'un polynôme d'interpolation $q(u)$ de degré plus petit.
   c) À l'aide de la méthode des différences divisées, calculer $q(u)$ et en déduire $P(x)$. Pour cela, on donnera le tableau des différences divisées et le résultat $P(x)$ sera ordonné en x.

Exercice 8 Splines cubiques.

1. Déterminer l'unique fonction $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
   - σ est de classe $\mathbb{C}2$ sur $\mathbb{R}$;
   - $\sigma(t) = 0$ pour $t \leq 0$;
   - σ est un polynôme de degré au plus égal à 3 pour $t \geq 0$;
   - $\lim_{t \to 0^+} \sigma'''(t) = 1$.
2. Soient $[a,b]$ un intervalle borné sur $\mathbb{R}$, $n \geq 2$ un entier et t_i des réels tels que $a < t_1 < \cdots < t_n < b$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que
   - s est de classe C^2 sur $[a,b]$
   - la restriction de s à chaque $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré au plus égal à 3 ;
   - la restriction de s à chaque $[a, t_1]$ et $[t_n, b]$ est un polynôme de degré au plus égal à 1.

   Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? On montrera que toute fonction $s \in \mathcal{S}$ peut s'écrire sous la forme $s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \sigma(t - t_i)$.

3. Soit $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$s(t_i) = f(t_i), \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Pour cela, on pourra écrire le système linéaire que vérifient les coefficients α, β et γ_i pour $i = 1, \ldots, n$.

IV. Polynômes orthogonaux

Exercice 9 Polynômes orthogonaux – Tchebychev et Legendre.
Soit $]a, b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Par définition, un *poids* w est une fonction $w \in \mathbb{C}^0(]a, b[; \mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx < +\infty, \qquad \forall n.$$

L'espace vectoriel E des fonctions f continues sur $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2} < +\infty$$

est muni du produit scalaire naturel $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$.

1. Montrer que E contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes. Montrer qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n) orthogonaux pour un poids donné w et tels que $\deg(p_n) = n$.
2. Montrer que les polynômes de Tchebychev (t_n) sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$.
3. Même question pour les polynômes de Legendre

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

relativement au poids $w(x) = 1$ sur $[-1, 1]$.

4. Soit (p_n) une suite de polynômes unitaires orthogonaux pour le poids w. Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x - \lambda_n) p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x), \qquad n \geq 2,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{\langle x p_{n-1} \mid p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

Retrouver, en particulier, les relations de récurrence pour le calcul des polynômes

(a) de Tchebychev : $t_{n+1}(x) = 2x t_n(x) - t_{n-1}(x)$,
(b) et de Legendre : $n L_n(x) = (2n-1) x L_{n-1}(x) - (n-1) L_{n-2}$.
