Intégration numérique

Exercice 1 Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On considère la formule de quadrature élémentaire :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f'(\xi)$$

où $\xi \in]0,1]$ et w_0, w_1, w_2 sont des réels. On pose

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - [w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f'(\xi)].$$

1. Déterminer les paramètres ξ, w_0, w_1, w_2 pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
2. Les paramètres ξ, w_0, w_1, w_2 étant ainsi fixés, calculer $E\left(x \mapsto x^4\right)$ et en déduire l'ordre de la méthode.
3. On suppose que $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que l'erreur d'interpolation peut se mettre sous la forme

$$E(f) = \frac{1}{3!}\int_0^1 K(t) f^{(4)}(t)dt,$$

où K est la fonction définie sur $[0,1]$ par $K(t) = E(g_t)$, où

$$g_t(x) = [(x-t)_+]^3 = [\max\{x-t, 0\}]^3.$$

4. Déterminer une expression simplifiée de la fonction K, appellée noyau de Peano de la méthode.
5. À l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a,b]$ et donner la valeur de l'erreur.

Exercice 2 Interpolation – Intégration numérique utilisant les polynômes de Hermite.

1. Soit $(\alpha_i)_{1\le i\le 4} \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_3$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1,\ p'(0) = \alpha_2,\ p(1) = \alpha_3,\ p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

2. Calculer les quatres polynômes p_1, p_2, p_3, p_4 de $\mathcal{P}_3$ vérifiant les relations (**??**) avec respectivement $(\alpha_i)_{1\le i\le 4}$ égal à $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Montrer que le polynôme p de la question (a) s'écrit comme une combinaison linéaire des $(p_i)_{1\le i\le 4}$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question (a) avec $\alpha_1 = f(0)$, $\alpha_2 = f'(0)$, $\alpha_3 = f(1)$ et $\alpha_4 = f'(1)$. Montrer que, pour chaque $x \in]0,1[$, il existe $\xi_x \in]0,1[$ tel que

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4} f^{(4)}(\xi_x), \qquad \text{où } \pi(x) = x^2(x-1)^2.$$

4. On approche l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim \int_0^1 p_f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_3$. Pour $1 \le i \le 4$, calculer les poids $w_i = \displaystyle\int_0^1 p_i(x)\,\mathrm{d}x$, et en déduire une forme explicite de la formule de quadrature.

5. Montrer que $x \mapsto f^{(4)}(\xi_x)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe $\eta \in]0,1[$ tel que
$$E(f) := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 p_f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{720} f^{(4)}(\eta).$$
6. Soient $a \leq b$ et $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$. En utilisant les résultats précédents, construire une formule de quadrature qui soit exacte sur $\mathcal{P}_3$, et de la forme :
$$J(f) = \gamma_1 f(a) + \gamma_2 f'(a) + \gamma_3 f(b) + \gamma_4 f'(b).$$
Calculer l'erreur $E(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - J(f)$.
7. Soit une discrétisation de $[a,b]$ par des points équidistants $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq n$, où $h = (b-a)/n$. Construire une formule de quadrature composée qui utilise les valeurs $(f(x_i))_{0\leq i\leq n}$ et $(f'(x_i))_{0\leq i\leq n}$. Estimer l'erreur de cette formule de quadrature.

Exercice 3 Calcul des coefficients de la formule de Newton-Cotes.
Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_j = -1 + 2j/\ell$, $0 \leq j \leq \ell$. La formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes de rang ℓ s'écrit
$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim 2\sum_{j=0}^{\ell} w_j^{(\ell)} f(x_j). \tag{2}$$
On note $E_\ell(f) = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\sum_{j=0}^{\ell} w_j^{(\ell)} f(x_j)$.

1. Montrer que, pour $j = 0, \ldots, \ell$, on a
$$w_j^{(\ell)} = \frac{(-1)^{\ell-j} C_\ell^j}{\ell\,\ell!} \int_0^\ell \frac{\pi_\ell(s)}{s-j}\mathrm{d}s, \qquad \text{où } \pi_\ell(s) = \prod_{j=0}^{\ell}(s-j).$$
2. Si on écrit $\pi_\ell(s) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\ell+1} S_{\ell+1}^i s^i$, montrer que les coefficients $S_{\ell+1}^i$, appelés les nombres de Stirling de première espèce, vérifient
$$S_1^0 = 0,\ S_1^1 = 1, \qquad S_{\ell+1}^0 = 0,\ S_{\ell+1}^1 = 1, \qquad S_{\ell+1}^i = S_\ell^{i-1} - \ell S_\ell^i, \quad 1 \leq i \leq \ell.$$
3. Si $\dfrac{\pi_\ell(s)}{s-j} = \displaystyle\sum_{i=0}^{\ell} a_{j,i}^{(\ell)} s^i$, $0 \leq j \leq \ell$, en déduire un algorithme de calcul des coefficients $S_{\ell+1}^j$ et $a_{j,i}^{(\ell)}$.
Trouvez les expressions des points $w_j^{(\ell)}$ par cet algorithme.
4. Construire les formules de Newton-Cotes pour $\ell = 1, 2, 3$.

Exercice 4 Intégration numérique aux points de Tchebychev.
On se propose d'établir quelques résultats sur la formule approchée
$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim \int_{-1}^1 P_n(x)\,\mathrm{d}x,$$
où P_n est le polynôme d'interpolation de degré n de f aux points de Tchebychev
$$x_i = \cos\theta_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad i = 0, \ldots, n.$$

1. Pour tout $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note
$$a_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n\ \mathrm{acos}\,x) - \cos(n\ \mathrm{acos}\,y)}{x-y}\mathrm{d}y.$$
Montrer que
$$\int_{-1}^1 P_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i), \qquad \text{avec } w_i = \frac{(-1)^i \sin\theta_i}{n+1} a_{n+1}(x_i).$$

2. Calculer $a_{n+1}(x) + a_{n-1}(x)$ et en déduire la valeur de

$$a_{n+1}(x) - 2xa_n(x) + a_{n-1}(x).$$

3. En distinguant deux cas suivant la parité de n, montrer l'égalité

$$\sin\theta\, a_n(\cos\theta) = 2\sin(n\theta) - 4\sum_{1\leq q\leq \frac{n+1}{2}} \frac{1}{4q^2-1}\sin((n-2q)\theta).$$

4. En déduire $w_i = \dfrac{1}{n+1}\left[2 - 4\displaystyle\sum_{1\leq q\leq \frac{n+1}{2}} \frac{1}{4q^2-1}\cos(2q\theta_i)\right]$; montrer $w_i > 0$ pour tout i.