Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L3
UE 3M263 – Intégration — Année 2016–17

TD1. Ensembles.

Exercice 1.
Soit A, B, C trois ensembles.

a) On suppose que $A \cup B \subseteq A \cup C$ et $A \cap B \subseteq A \cap C$. Montrer que $B \subseteq C$.

b) On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 2.
Soit E un ensemble et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ pour toutes parties disjointes A et B de E.

a) Montrer que $f(\emptyset) = 0$.

b) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ pour toutes parties A et B de $\mathbb{E}$.

c) Montrer que $f(A) \leq f(B)$ pour toutes parties A et B de E telles que $A \subseteq B$.

d) Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de parties de E. Montrer que la suite $(f(A_n))_n$ est croissante et convergente, de limite inférieure ou égale à $f\big(\cup_n A_n\big)$.

e) Exemple : Reprendre la question d) avec $E = \{1, \ldots, n\}$ et $f(A) = card(A)$ pour $A \subseteq E$.

Exercice 3.
Soit X un ensemble et A, B, C, D des parties de X. On note $A \triangle B$

$$A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B) = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$$

la différence symétrique de A et B. Calculer $A \triangle \varnothing$, $A \triangle X$ et $A \triangle A$, puis montrer

a) $(A \cup B) = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$,

b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

c) $(A \smallsetminus B) \cap (C \smallsetminus D) = (A \cap C) \smallsetminus (B \cup D)$,

Exercice 4.
Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

a) Soit $A \subseteq X$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est injective.

b) Montrer que si pour tout sous-ensemble A de X on a l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$, alors f est injective.

c) Soit $B \subseteq Y$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est surjective.

d) Montrer que si pour tout sous-ensemble B de Y on a l'égalité $f(f^{-1}(B)) = B$, alors f est surjective.

Exercice 5.
Soit X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de Y. On suppose I et J non vides. Soit B une partie de Y. Démontrer les assertions suivantes.

a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ et $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, avec égalité quand f est injective.

b) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

c) ${}^c(f^{-1}(B)) = f^{-1}({}^cB)$.

Exercice 6.
Soit A, B des parties d'un ensemble X. Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur X et à valeurs réelles, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de X et si oui, de laquelle.
a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, b) $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$, c) $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, d) $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$, e)$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$,
f) $\sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$, g) $\inf(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Exercice 7.
Déterminer explicitement ou graphiquement les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1[}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[n,n+1/2[}, \qquad \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{[0,n[}.$$

Exercice 8.
Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ensembles on note

$$\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

a) Que représentent ces ensembles ?

b) Montrer que
$$\bigcap_n A_n \subset \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \subset \bigcup_n A_n.$$

c) Déterminer $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ si $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

Exercice 9.

a) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dénombrable.
On pourra considérer les ensembles $J(n) = \{x \in]a, b[\ ; \ |f(x+) - f(x-)| > 1/n\}$.

b) Qu'en est-il pour une fonction réelle monotone définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?