

## TD2. Tribus.

### Exercice 1.

Soit  $X$  un ensemble. Donner des conditions sur  $X$  pour que les classes suivantes soient des tribus.

- $\{\emptyset, X\}$ .
- $\mathcal{P}(X)$ .
- $\{\emptyset, \{x\}, X\}$  où  $x \in X$  est donné.
- $\{\emptyset, \{x\}, {}^c\{x\}, X\}$  où  $x \in X$  est donné.
- La classe des parties finies de  $X$ .
- La classe des parties dénombrables de  $X$ .
- La classe des parties finies ou cofinies de  $X$ . On dit qu'une partie  $A$  de  $X$  est cofinie si  $X \setminus A$  est finie.
- La classe des parties dénombrables ou codénombrables de  $X$ . On dit qu'une partie  $A$  de  $X$  est codénombrable si  $X \setminus A$  est dénombrable.

### Exercice 2.

- Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  des classes de parties de  $E$  telles que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ . Montrer que  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ .
- Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas toujours une tribu.
- Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux tribus sur  $E$ . Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

### Exercice 3.

Soit  $E$  un ensemble.

- Décrire la tribu engendrée par la classe  $\mathcal{S}$  des singletons de  $E$ .
- Décrire la tribu engendrée par la classe  $\mathcal{F}$  des parties finies de  $E$ .

### Exercice 4.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Montrer que

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A = f^{-1}(f(A))\}$$

est une tribu sur  $X$ .

**Exercice 5.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\mathcal{B}$  une tribu sur  $Y$ . Montrer que

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

est une tribu sur  $X$ .

### Exercice 6.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $X$ . Montrer par un contre-exemple que la classe des images directes  $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$  n'est en général pas une tribu sur  $Y$ .