TD3. Mesures.

Exercice 1. Soit a un réel. On note δ_a la masse de Dirac en a sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, définie pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et 0 sinon. Montrer que δ_a est une mesure.

Exercice 2. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

a) Montrer que λ est σ-finie, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ et $\lambda(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $\lambda(K) < +\infty$ pour tout ensemble fermé borné K de $\mathbb{R}$.

c) Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ?

d) Construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue 5.

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \mu_f & : & \mathcal{B} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & & B & \longmapsto & \mu(f^{-1}(B)) \end{array}$$

est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$, appelée mesure image de μ par f.

Exercice 4.

a) Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de mesures positives sur $\mathcal{A}$: pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mu_j(A) \leq \mu_{j+1}(A)$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_j(A)$. Montrer que μ ainsi définie est une mesure.

b) Sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on définit, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\nu_j(A) = \operatorname{card}(A \cap [j, +\infty[)$. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, ν_j ainsi définie est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et que $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

c) Soit ν l'application positive définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\nu(A) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(A)$ pour toute partie A de $\mathbb{N}$. Déterminer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dire si ν est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

a) On pose $A_n = \{|f| \leq n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $\mu(X) \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_n) \neq 0$.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mu(A) \neq 0$ et pour tout $x \in A$, $|f(x)| \geq \varepsilon$.

Exercice 6. (**Lemme de Borel-Cantelli**) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_n \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu\left(\limsup A_n\right) = 0$.

Exercice 7. Soient μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \mu(] - \infty, x])$.

a) Montrer que F est croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $\pm\infty$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
En déduire que $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ (l'ensemble des atomes de μ) est dénombrable.