TD4. Construction de la mesure de Lebesgue

A. Dans cette première partie, un ensemble E est fixé. On appelle *mesure extérieure* sur E une fonction $m : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que

a) $m(\varnothing) = 0$,

b) pour toutes parties A et B de E telles que $A \subset B$, on a $m(A) \leqslant m(B)$,

c) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de parties de E, on a

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n).$$

Soit m une mesure extérieure sur E.

1. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $m(A) \leqslant m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$.

On définit la classe

$$\mathcal{M} = \{B \subset E : \forall A \subset E, m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)\}.$$

2. Soient B_1 et B_2 des éléments de $\mathcal{M}$. Soit A une partie de E. Montrer que

$$m(A \cap (B_1 \cup B_2)) = m(A \cap B_1) + m(A \cap B_1^c \cap B_2),$$

puis que $B_1 \cup B_2$ appartient à $\mathcal{M}$.

3. Soit $(B_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$. Soit A une partie de E.

a. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, on a

$$m(A) = \sum_{k=0}^{p} m(A \cap B_k) + m\left(A \cap \bigcap_{k=0}^{p} B_k^c\right).$$

b. En déduire que

$$m(A) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} m(A \cap B_k) + m\left(A \cap \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k^c\right),$$

puis que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$ appartient à $\mathcal{M}$.

c. En déduire que

$$m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} m(B_k).$$

4. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{M}$ est une tribu sur E et que la restriction de m à $\mathcal{M}$ est une mesure sur $(E, \mathcal{M})$.

B. Dans cette deuxième partie, on convient que pour tout réel a, la notation $]a, a[$ désigne l'ensemble vide. Pour toute partie A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on définit un élément $\ell(A)$ de $[0, +\infty]$ en posant

$$\ell(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i) : a_i \leqslant b_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \text{ et } A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i, b_i[\right\}.$$

5. Calculer $\ell(\varnothing)$.

6. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que $\ell(A) \leqslant \ell(B)$.

7. Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, on ait $\ell(A_n) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel.
a. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, il existe deux suites $(a_i^{(n)})_{i\geqslant 0}$ et $(b_i^{(n)})_{i\geqslant 0}$ de réels telles que pour tout $i \geqslant 0$ on ait $a_i^{(n)} \leqslant b_i^{(n)}$, telles que

$$A_n \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i^{(n)}, b_i^{(n)}[\quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(b_i^{(n)} - a_i^{(n)} \right) \leqslant \ell(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

b. En déduire que

$$\ell\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \leqslant 2\varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \ell(A_n).$$

8. Déduire de ce qui précède que ℓ est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.

On considère la classe

$$\mathcal{L} = \{B \subset \mathbb{R} : \forall A \subset \mathbb{R}, \ell(A) = \ell(A \cap B) + \ell(A \cap B^c)\}.$$

9. Montrer que $\mathcal{L}$ contient l'intervalle $]-\infty, x]$ pour tout x réel.

10. Montrer que $\mathcal{L}$ contient la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

11. Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
a. Montrer que $\ell([a, b]) \leqslant b - a$.

Soient $(a_i)_{i\geqslant 0}$ et $(b_i)_{i\geqslant 0}$ deux suites telles que $[a, b] \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i, b_i[$.
b. Montrer par un argument topologique qu'il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=0}^{N}]a_i, b_i[.$$

c. Déduire de cette inclusion que $b - a \leqslant \sum_{i=0}^{N} (b_i - a_i)$, puis que $\ell([a, b]) \geqslant b - a$.

12. Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Montrer que $\ell(]a, b[) = b - a$.

13. Montrer que la restriction de ℓ à la tribu borélienne est la mesure de Lebesgue.