TD5. Fonctions mesurables

Exercice 1.
Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient f, $g : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables.

a) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'intervalles ouverts.

b) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une union dénombrable de pavés ouverts.

c) Montrer que l'application $\Phi : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x) = (f(x), g(x))$ est mesurable.

d) En déduire que $f + g$, fg, f/g (si $g \neq 0$) sont mesurables.

Exercice 2.
Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E : \text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$.

Exercice 3.
Soient X et Y deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne et $f : X \to Y$ une application dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est borélienne.

Exercice 4.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}_f = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f.

a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que $g = h \circ f$ est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{A}_f)$ dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $s : (E, \mathcal{A}_f) \to \mathbb{R}$ une fonction étagée mesurable. Montrer qu'il existe une fonction borélienne t telle que $s = t \circ f$.

c) Montrer que si $g : (E, \mathcal{A}_f) \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors il existe h borélienne telle que $g = h \circ f$.

   Indication : *On pourra approcher g par une suite de fonctions étagées.*

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est borélienne.

Exercice 6. (**Théorème d'Egoroff**)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable.

b) On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu(X \setminus C) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$E_n^k = \bigcap_{i\geq n} \left\{ |f_i - f| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que $C \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n^k$. En déduire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu\left(E \setminus E^k_{n_{k,\varepsilon}}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

c) (Théorème d'Egoroff) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E_ε et tel que $\mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$.

d) Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 7.
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure* vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

a) Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers f, alors elle converge en mesure vers f.

b) Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f :

   i) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que

   $$\forall k \geq 1,\ \mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{k^2}.$$

   ii) Soit $A = \varliminf_k \{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$. Montrer que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge simplement vers f sur A et que $\mu(E \setminus A) = 0$ (en d'autres termes, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge μ-p.p. vers f).