TD 7. Intégrales à paramètre

Exercice 1. Déterminer la limite des suites $(I_n)_{n\geq 1}$ suivantes :

$$\text{(i) } I_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx \qquad \text{(ii) } I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3}$$

$$\text{(iii) } I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{x^2}+\pi}{ne^{2x^2}+4x^4}dx \qquad \text{(iv) } I_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}dx \qquad \text{(v) } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}dx.$$

Exercice 2.

a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ax}f(x)$ est intégrable. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{zx}f(x)dx = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx$.

Exercice 3. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\displaystyle\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos x}{x}\, dx$.

a) Montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer explicitement sa dérivée.

c) Calculer la limite de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$. En déduire la valeur de $\varphi(t)$.

Exercice 4. Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx.$$

a) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\displaystyle\Gamma(t+1) = \sqrt{t}\, t^t e^{-t}\int_{-\sqrt{t}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy$.

d) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, la fonction $t \mapsto t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $y \in \left]-\sqrt{t}, 0\right[$, $t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{y^2}{2}$.

e) Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\sqrt{t}}^{0}\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy.$$

f) En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, en déduire la formule de Stirling :

$$\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\, t^t\, e^{-t}.$$