TD8. Mesures produit et théorème de Fubini.

Exercice 1.
a) Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.
b) Soit μ la mesure de comptage de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu \otimes \mu$ est la mesure de comptage de $\mathbb{N}^2$.

Exercice 2. Montrer que le graphe d'une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.

a) Soit $u : X \to [0, +\infty[$ une fonction positive et mesurable. Montrer que
$$\int_X u \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\}) dt.$$

b) Plus généralement, soit $p \geq 1$ et $u : X \to [0, +\infty]$ une fonction positive mesurable. Montrer que
$$\int_X u^p \, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\}) dt.$$

Exercice 4. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}, \mu)$, monotones de même sens et vérifiant $fg \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} fg d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$
(Indication : considérer la fonction $\varphi(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$)

Exercice 5. Soit $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ borélienne et $A \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], y^2 + z^2 \leq f(x)\}.$$
a) Montrer que l'application
$$F : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = y^2 + z^2 - f(x)$$
est borélienne et en déduire que $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$.
b) Pour $x \in [0, 1]$ déterminer la section $A_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$ et calculer sa mesure.
c) Calculer le volume de A en fonction de f. Vérifier que $Vol(A) = \pi/3$ si $f = x^2$.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par $f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable. Calculer alors son intégrale.

Exercice 7.

a) Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$ pour obtenir la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

b) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.