TD9. Changement de variable.

Exercice 1.
On note $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ l'espace euclidien usuel de dimension n et $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| < r\}$ la boule euclidienne de rayon $r > 0$. On va calculer le volume V_1 de la boule unité $B(0,1)$ en jouant avec la fonction Γ. On rappelle que pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$.

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \pi^{\frac{n}{2}}$.

b) Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : e^{-\|x\|^2} > t\})dt\,.$$

c) En utilisant l'homogénéité de la fonction volume, déduire de la formule ci-dessus que
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = V_1 \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{n}{2}} dt\,.$$

d) En déduire que $V_1 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

e) Montrer que pour $s > 1$, on a $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$. En déduire par récurrence la valeur de $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, pour tout entier naturel n, puis le volume V_1 de la boule unité :
$$V_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & \text{si} \quad n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Exercice 2.
Soit Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \Delta \to D$ un C^1-difféomorphisme de jacobien J_φ.

a) Montrer que J_φ est intégrable sur Δ si et seulement si $\lambda_d(D) < +\infty$.

b) Montrer que J_φ est borné sur Δ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que, pour tout ouvert $\Omega \subset \Delta$, $\lambda_d(\varphi(\Omega)) \leq c\lambda_d(\Omega)$.

Exercice 3.
Soit $\Delta =]0,1[^2 \times]-\pi,\pi[$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\varphi(u,v,w) = (u, uv\cos w, v\sin w)$.

a) Montrer que φ est un C^1 difféomorphisme de Δ sur son image.

b) Calculer $\lambda_3(\varphi(\Delta))$.

Exercice 4.

a) Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u,v) = (u^2+v^2, 2uv)$ est un C^1-difféomorphisme de $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u > v > 0\}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y > 0\}$.

b) En déduire la valeur de $\int_{(\mathbb{R}_+)^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} dudv$.

Exercice 5.

a) Montrer que l'application

$$\psi :]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\phi) \mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$

est un C^1 difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ sur son image, que l'on déterminera précisément.

b) Calculer le volume de la boule $B(0,R)$ de centre $(0,0,0)$ et de rayon $0 \leq R \leq 1$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Calculer la valeur de

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz.$$

d) Calculer le volume d'une calotte, c'est-à-dire de l'intersection de la boule unité $B(0,1)$ avec le demi-espace $r\cos\theta > a$ pour $0 < a < 1$.