Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
Master de Sciences et Technologies
Mention mathématiques, M1

# Analyse fonctionnelle approfondie et calcul des variations

# 4M025

*Jean-François Babadjian*

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction au calcul des variations

On rappelle qu'un espace métrique $X$ est un ensemble $X$ muni d'une distance $d$ qui est une application $d : X \times X \to [0, +\infty)$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :
i) *Symétrie* : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x$, $y \in X$ ;
ii) *Séparation* : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ ;
iii) *Inégalité triangulaire* : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout $x$, $y$, $z \in X$.

On notera $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre $x$ et rayon $r$ et $\overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ la boule fermée.

## 1.1 Fonctions continues

Dans ce qui suit, $(X_1, d_1)$ et $(X_2, d_2)$ désignent deux espaces métriques.

**Définition 1.1.1.** Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue au point $x \in X_1$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$d_1(x, y) \leq \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On dit que $f$ est continue si elle est continue en tout point.

Dans un espace métrique, la continuité en un point est équivalente à la continuité séquentielle.

**Lemme 1.1.2.** *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue au point $x \in X$ si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ dans $X_1$, alors $f(x_n) \to f(x)$ dans $X_2$.*

*Démonstration.* Si $f$ est continue en $x$ et $x_n \to x$ dans $X_1$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_1(x, x_n) \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que $d_2(f(x), f(x_n)) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Réciproquement, si $f$ n'est pas continue en $x$, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $y_\delta \in X_1$ satisfaisant $d_1(x, y_\delta) \leq \delta$ et $d_2((f(x), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$, alors en prenant $\delta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et en posant $x_n := y_{1/n}$, alors $x_n \to x$ dans $X_1$ et $d_2((f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$, ce qui montre que $f(x_n) \not\to f(x)$. □

De même, dans les espaces métriques, on retrouve la caractérisation des fonctions continues pour les espaces topologiques.

**Proposition 1.1.3.** *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $X_2$ est un ouvert de $X_1$ (resp. l'image réciproque de tout fermé de $X_2$ est un fermé de $X_1$).*

*Démonstration.* On démontre la première assertion, la seconde suit par passage au complémentaire.

Soit $f$ continue et $U_2$ un ouvert de $X_2$. On pose $U_1 := f^{-1}(U_2)$. Si $x \in U_1$, alors $f(x) \in U_2$ ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_2(f(x), \varepsilon) \subset U_2$. Par continuité de $f$ en $x$, il existe un $\delta > 0$ tel que $f(B_1(x, \delta)) \subset B_2(f(x), \varepsilon) \subset U_2$, soit $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(U_2) = U_1$ ce qui prouve que $U_1$ est ouvert dans $X_1$.

Réciproquement, soient $x \in X_1$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble $U_2 = B_2(f(x), \varepsilon)$ est ouvert dans $X_2$, donc $f^{-1}(U_2)$ est ouvert dans $X_1$ et $x \in f^{-1}(U_2)$. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(U_2)$, soit $f(B_1(x, \delta)) \subset B_2(f(x), \varepsilon))$ ce qui montre que $f$ est continue en $x$. □

## 1.2 Fonctions semi-continues inférieurement

Dans le cas d'applications à valeurs réelles, une notion plus faible jouera un rôle important : la semi-continuité intérieure. Dans ce qui suit, $(X, d)$ désigne un espace métrique.

**Définition 1.2.1.** Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (sci) au point $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$d(x, y) \leq \delta \Longrightarrow f(y) \geq f(x) - \varepsilon.$$

On dit que $f$ est sci sur $X$ si elle est sci en tout point de $X$.

Dans un espace métrique, la semi-continuité inférieure en un point est équivalente à la semi-continuité inférieure séquentielle.

**Proposition 1.2.2.** *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est sci au point $x \in X$ si et seulement si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ dans $X$, alors*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

La preuve de ce résultat est une adaptation très simple de celle du Lemme 1.1.2

*Démonstration.* Si $f$ est sci en $x$ et $x_n \to x$ dans $X$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que $f(x_n) \geq f(x) - \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Par passage à l'inf en $n \geq n_0$, il vient $\inf_{n\geq n_0} f(x) \geq f(x) - \varepsilon$, puis par passage au sup en $n_0$,

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{n_0\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq n_0} f(x_n) \geq f(x) - \varepsilon.$$

La conclusion suit en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0.

Réciproquement, si $f$ n'est pas sci en $x$, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $y_\delta \in X_1$ satisfaisant $d(x, y_\delta) \leq \delta$ et $f(y_\delta) \leq f(x) - \varepsilon_0$, alors en prenant $\delta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et en posant $x_n := y_{1/n}$, alors $x_n \to x$ dans $X$ et $f(x_n) \leq f(x) - \varepsilon_0$. Par passage à la liminf, il vient,

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leq f(x) - \varepsilon_0 < f(x),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Le résultat suivant établit une caractérisation topologique des fonctions sci.

**Proposition 1.2.3.** *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est sci si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a])$ est fermé dans $X$.*

*Démonstration.* Si $f$ est sci, $f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in X : f(x) \leq a\}$ est fermé d'après la Proposition 1.2.2. Réciproquement, supposons que $f^{-1}(]-\infty, a])$ est fermé dans $X$. Si $x \in X$ est tel que $a < f(x)$, alors l'ensemble ouvert $\{f > a\}$ contient $x$. Donc il existe un $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset \{f > a\}$. Si $x_n \to x$ dans $X$, alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, \delta)$ pour tout $n \geq n_0$, et donc $f(x_n) > a$. Par passage à la liminf en $n$, il vient

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq a,$$

puis, $a$ étant arbitrairement proche de $f(x)$,

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x),$$

ce qui montre que $f$ est sci en $x$. □

Il est souvent utile de considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et l'on étend la Définition 1.2.1 et les propriétés à ce cadre. En particulier, la fonction indicatrice

$$I_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ +\infty & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est sci si et seulement si $A$ est fermé.

**Proposition 1.2.4.** *Pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une famille de fonctions sci. Alors $\sup_{i\in I} f_i$ est également sci.*

*Démonstration.* Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X$ telle que $x_n \to x$ dans $X$. Alors, pour tout $i \in I$,

$$f_i(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f_i(x_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} \sup_{i\in I} f_i(x_n).$$

Par passage au sup en $i \in I$ dans le membre de gauche, il vient

$$\sup_{i\in I} f_i(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \sup_{i\in I} f_i(x_n),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

## 1.3 Compacité

Nous introduisons ci-dessous deux notions, l'une topologique, l'autre séquentiellement, de compacité.

**Définition 1.3.1 (Propriété de Heine-Borel).** Un espace métrique $(X, d)$ est dit *compact* si de tout recouvrement de $X$ par une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe $i_1, \ldots, i_m \in I$ tels que $X \subset \bigcup_{k=1}^m U_{i_k}$.

**Définition 1.3.2 (Propriété de Bolzano-Weierstrass).** Un espace métrique $(X, d)$ est dit *séquentiellement compact* si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$, on peut extraire une sous-suite convergente.

Il s'avère que ces deux notions coïncident dans les espaces métriques.

**Théorème 1.3.3.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique. Alors $X$ est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.*

*Démonstration.* **Etape 1 : compact implique séquentiellement compact.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X$. Si la suite possède un nombre fini d'éléments, alors on peut clairement extraire une sous-suite convergente. Dans le cas contraire, supposons, par l'absurde qu'elle ne possède aucune valeur d'adhérence. Alors pour tout $x \in X$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient alors un recouvrement ouvert

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, r_x)$$

du compact $X$, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, r_{x_k}).$$

Comme chaque boule ne contient qu'un nombre fini d'élements de la suite, alors $X$ également ce qui est absurde.

**Etape 2 : séquentiellement compact implique compact.** Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X$.

Montrons qu'il existe un $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, \rho) \subset U_{i(x)}$. Dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ telle que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. On peut alors extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction strictement croissante, qui converge vers un $x \in X$. Par conséquent, il existe un $i \in I$ tel que $x \in U_i$, et $U_i$ étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Or pour $n$ assez grand on a que $B(x_{\sigma(n)}, \frac{1}{\sigma(n)}) \subset B(x, r) \subset U_i$ ce qui est impossible.

Montrons à présent que $X$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\rho$. Dans le cas contraire, pour tout $x_0 \in X$, la boule $B(x_0, \rho)$ ne recouvre pas $X$. Il existe donc un $x_1 \in X$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \rho$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$ ne recouvre pas $X$, on peut trouver un $x_{n+1}$ dans le complémentaire. On construit alors une suite $(x_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $X$ qui satisfait $d(x_n, x_m) \geq \rho$ pour tout $n \neq m$, et qui ne possède donc aucune sous-suite convergente ce qui est absurde.

On a donc montré l'existence de $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_i, \rho)$$

et donc *a fortiori* un sous-recouvrement fini issu de $\{U_i\}_{i\in I}$ en prenant $i(x_k)$ pour $k = 1, \ldots, m$ car $B(x_k, \rho) \subset U_{i(x_k)}$. ☐

**Corollaire 1.3.4.** *Les parties compactes d'un espace métrique sont fermées et bornées.*

*Démonstration.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X$ qui converge vers $x$. Comme $X$ est séquentiellement compact, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un $\bar{x} \in X$. Par unicité de la limite, on en déduit que $x = \bar{x} \in X$ ce qui montre que $X$ est fermé.

Si $X$ n'est pas borné, on peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de $X$ telle que $d(x_n, x_0) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il n'existe pas de sous-suite convergente. ☐

Noter que la réciproque est fausse en général. En ce qui concerne les espace vectoriels normés, les parties compactes sont fermées et bornées en dimension finie par le théorème de Bolzano-Weierstrass, mais cette caractérisation est fausse en dimension infinie.

## 1.4 Premiers résultats d'existence en calcul des variations

Soit $(X, d)$ un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. L'un des fils conducteurs de ce cours est l'étude des points extrèmes de $f$ (existence, unicité, caractérisation, ...). En remplaçant $f$ par $-f$, on se ramène à un problème du type

$$\inf_{x \in X} f(x),$$

et l'on cherche $x_0 \in X$ avec $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in X$ qui est un minimum de $f$ sur $X$.

**Proposition 1.4.1.** *Si $(X, d)$ est un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $f$ atteind ses bornes.*

*Démonstration.* Montrons que $f$ atteint son inf sur $X$. Par définition de l'inf, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in X$ tel que

$$f(x_n) \leq \inf_X f + \frac{1}{n}.$$

L'espace métrique $X$ étant compact, il est séquentiellement compact. Donc on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite notée $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Il existe donc $x \in X$ tel que $x_{\sigma(n)} \to x$ dans $X$ et, par continuité de $f$, $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Par conséquent

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left( f(x_{\sigma(n)}) + \frac{1}{\sigma(n)} \right) \leq \inf_X f \leq f(x),$$

ce qui montre que $f(x) = \inf_X f$. On procède de même pour le sup. □

La démonstration précédente montre en fait que la semi-continuité inférieure de $f$ suffit pour obtenir l'existence d'un minimum. Plus généralement pour un problème de minimisation, on a le résultat suivant.

**Proposition 1.4.2.** *Si $(X, d)$ est un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction sci, alors $f$ atteind son inf : il existe un $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in X$.*

Le résultat suivant permet de résoudre des problèmes de minimisation dans les espaces vectoriels normés de dimension finie lorsque l'on contrôle le comportement de la fonction à l'infini. On rappelle qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel $E$ muni d'une norme qui est une application $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :
i) *Séparation* : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ ;
ii) *Homogénéité* : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$ ;
iii) *Inégalité triangulaire* : $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ pour tout $x$, $y$, $z \in E$.

**Définition 1.4.3.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est *coercive* si $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

**Proposition 1.4.4.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction sci et coercive. Alors il existe un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$.*

*Démonstration.* Soit $y \in E$ et $a = f(y)$. Par coercivité de $f$, il existe $R > 0$ tel que si $\|x\| > R$, alors $f(x) > a + 1$. Considérons maintenant une suite minimisante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \to \inf_E f$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_n) \leq a + 1$ pour tout $n \geq n_0$ de sorte que $\|x_n\| \leq R$ pour tout $n \geq n_0$. Donc la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est uniformément bornée et, $E$ étant de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $x_0 \in E$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x_0$ dans $E$. La fonctions $f$ étant sci, il vient,

$$\inf_E f \leq f(x_0) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_{\sigma(n)}) = \lim_{n \to +\infty} f(x_{\sigma(n)}) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \inf_E f,$$

ce qui montre que $x_0$ est un minimum de $f$. □

Les résultats précédent concernant l'existence d'extrema reposent de façon fondamentale sur des propriétés de compacité des suites minimisantes ou maximisantes. En particulier, en dimension finie, les suites bornées sont toujours séquentiellement relativement compactes. Malheureusement, comme l'indique le résultat qui suit, cette propriété est fausse en dimension infinie.

**Théorème 1.4.5 (Riesz).** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée est compacte si et seulement $E$ est de dimension finie.*

*Démonstration.* Si $E$ est de dimension finie, alors le théorème de Bolzano-Weierstrass assure effectivement que tout ensemble fermé borné est compact.

Réciproquement, notons $B := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $E$ que nous supposons compacte. Par la propriété de Borel-Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_N \in B$ tels que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon). \tag{1.4.1}$$

Soit $F = \mathrm{Vect}\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$ qui est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie. Si $F = E$, alors le résultat suit. Dans le cas contraire, on peut trouver un $x \in E \setminus F$. Notons $d = \mathrm{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Comme $F$ est de dimension finie, $F$ est fermé dans $E$ et donc $d > 0$. On peut alors trouver un $y_\varepsilon \in F$ tel que

$$d \leq \|x - y_\varepsilon\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Posons $z_\varepsilon = \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|} \in B$. Alors pour tout $y \in F$,

$$\|z_\varepsilon - y\| = \frac{\|x - y_\varepsilon - \|x - y_\varepsilon\| y\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geq d \frac{1 - \varepsilon}{d} = 1 - \varepsilon$$

car $y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\| y \in F$, ce qui montre que

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \geq 1 - \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après (1.4.1), il existe un $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $z_\varepsilon \in B(x_i, \varepsilon)$ et donc, puisque $x_i \in F$,

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \leq \|z_\varepsilon - x_i\| < \varepsilon.$$

On aboutit à une contradiction en choisissant $\varepsilon \leq 1/2$. □

La topologie dite "forte" de la norme dans un espace vectoriel normé contient donc trop d'ouverts pour permettre aux fermés bornés d'être compacts en dimension infinie. L'un des objets de ce cours sera d'une part de montrer que des critères de compacité forte pour des suites dans des espaces particuliers (fonctions continues, espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev) requièrent plus d'hypothèses que seulement d'être bornées, et d'autre part d'affaiblir la topologie en retirant des ouverts, ce qui par là même augmentera le nombre de compacts.

# Chapitre 2

# Espace de fonctions continues

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à montrer des propriétés topologiques sur les espaces de fonctions continues. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (donc compact) de $\mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{C}([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}.$$

Il s'agit clairement d'un espace vectoriel. Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on note

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

En vertu de la Proposition 1.4.1, l'intervalle $[a, b]$ étant compact dans $\mathbb{R}$, cette quantité est toujours finie quel que soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. On montre par ailleurs d'elle définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b])$ ce qui fait de $\mathcal{C}([a, b])$ un espace vectoriel normé.

## 2.1 Complétude de $\mathcal{C}([a, b])$

**Proposition 2.1.1.** *L'espace $\mathcal{C}([a, b])$ est un espace de Banach.*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}([a, b])$ est complet. Pour ce faire, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}([a, b])$ et montrons qu'elle converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, ce qui assure l'existence d'un nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$. Par passage à la limite quand $m \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, puis par passage au sup en $x$, il vient pour tout $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui assure que $f_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$. Il reste à montrer que la fonction $f$ est continue. Pour ce faire, on utilise la continuité de $f_N$ qui assure, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que si $y \in [a, b]$ et $|x - y| \leq \delta$, alors $|f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon$. D'où,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(y)| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre bien la continuité de $f$ en $x$ et donc que $f \in \mathcal{C}([a, b])$. □

## 2.2 Séparabilité de $\mathcal{C}([a,b])$

**Définition 2.2.1.** Un espace métrique $(X,d)$ est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

L'objet de cette section est de montrer le résultat suivant.

**Proposition 2.2.2.** *L'espace $\mathcal{C}([a,b])$ est séparable.*

Pour ce faire, nous allons montrer un résultat assurant que l'algèbre des polynômes est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$.

**Théorème 2.2.3 (Weierstrass).** *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$.*

*Démonstration.* On se ramène à l'intervalle $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $0 \le j \le n$, on définit les polynômes de Bernstein par

$$B_j(x) = C_n^j x^j (1-x)^{n-j}, \qquad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

On pose, pour tout $x \in [0,1]$,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) B_j(x).$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on a $\sum_{j=0}^{n} B_j(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$, et donc

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) B_j(x) \right| \le \sum_{j=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j(x). \tag{2.2.1}$$

La fonction $f$ étant continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tels que si $x$, $y \in [0,1]$,

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $x \in [0,1]$ fixé, on pose :

$$\begin{aligned} I &= \left\{ j = 0, \dots, n : \left| x - \frac{j}{n} \right| < \delta \right\}, \\ J &= \left\{ j = 0, \dots, n : \left| x - \frac{j}{n} \right| \ge \delta \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $B_j(x) \ge 0$ et $\sum_{j=0}^{n} B_j(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\sum_{j\in I} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j(x) \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j\in I} B_j(x) \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2.2}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j(x) &\le 2\|f\|_\infty \sum_{j\in J} B_j(x) \\ &\le \frac{2\|f\|_\infty}{n^2\delta^2} \sum_{j=0}^{n} (nx-j)^2 B_j(x). \end{aligned}$$

Admettons temporairement que

$$\sum_{j=0}^{n}(nx-j)^2 B_j(x) = nx(1-x), \tag{2.2.3}$$

alors on obtient que

$$\sum_{j\in J}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right| B_j(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n^2\delta^2}nx(1-x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}, \tag{2.2.4}$$

car la fonction $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $x = 1/2$ sur $[0,1]$. En regroupant (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.4), il vient, pour tout $x \in [0,1]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Si $n \geq \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon\delta^2}$, on a donc $\|f-P_n\|_\infty \leq \varepsilon$ et $\varepsilon$ étant arbitraire, on constate effectivement que la suite $(P_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

Il reste à montrer l'identité (2.2.3). Pour ce faire, on développe le carré

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}(j-nx)^2B_j(x) &= \sum_{j=0}^{n}(j^2-2nxj+n^2x^2)B_j(x)\\
&= \sum_{j=0}^{n}j^2B_j(x) - 2nx\sum_{j=0}^{n}jB_j(x) + n^2x^2\sum_{j=0}^{n}B_j(x)\\
&= \sum_{j=0}^{n}j(j-1)B_j(x) + (1-2nx)\sum_{j=0}^{n}jB_j(x) + n^2x^2\sum_{j=0}^{n}B_j(x).
\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a d'une part

$$\sum_{j=0}^{n}B_j(x) = \sum_{j=0}^{n}C_n^j x^j(1-x)^{n-j} = (x+1-x)^n = 1,$$

d'autre part, en remarquant que $jC_n^j = nC_{n-1}^{j-1}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}jB_j(x) &= \sum_{j=1}^{n}jC_n^jx^j(1-x)^{n-j} = \sum_{j=1}^{n}nxC_{n-1}^{j-1}x^{j-1}(1-x)^{(n-1)-(j-1)}\\
&= nx(x+1-x)^{n-1} = nx,
\end{aligned}$$

et enfin, en écrivant $j(j-1)C_n^j = n(n-1)C_{n-2}^{j-2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}j(j-1)B_j(x) &= \sum_{j=2}^{n}j(j-1)C_n^jx^j(1-x)^{n-j} = \sum_{j=2}^{n}n(n-1)C_{n-2}^{j-2}x^j(1-x)^{n-j}\\
&= n(n-1)x^2\sum_{j=2}^{n}C_{n-2}^{j-2}x^{j-2}(1-x)^{(n-2)-(j-2)}\\
&= n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2} = n(n-1)x^2.
\end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(j-nx)^2B_j(x) &= n(n-1)x^2+(1-2nx)nx+n^2x^2\\ &= n(n-1)x^2+nx-2n^2x^2+n^2x^2 = nx(1-x),\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la Proposition 2.2.2.

*Démonstration de la proposition 2.2.2.* D'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des polynômes à coefficients réels, noté $\mathbf{P}$, est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$. Il suffit donc de montrer que $\mathbf{P}$ est séparable pour la topologie de $\mathcal{C}([a,b])$. Pour ce faire, on constate d'abord que $\mathbf{P} = \bigcup_n \mathbf{P}_n$, où $\mathbf{P}_n$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égale à $n$, est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Par conséquent $\mathbf{P}_n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$ et comme $\mathbb{Q}^{n+1}$ est dense dans $\mathbb{R}^{n+1}$, il s'ensuit que les polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à $n$, noté $\mathbf{Q}_n$, est dense dans $\mathbf{P}_n$ pour la topologie de $\mathcal{C}([a,b])$. Comme $\mathbb{Q}^{n+1}$ est dénombrable et isomorphe à $\mathbf{Q}_n$, on en déduit que $\mathbf{Q}_n$ est dénombrable et donc que $\mathbf{Q} := \bigcup_n \mathbf{Q}_n$ l'est aussi. Enfin, on montre que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$. □

## 2.3 Critère de compacité

Nous établissons pour finir un critère de compacité dans l'espace $\mathcal{C}([a,b])$.

**Théorème 2.3.1** (Ascoli-Arzela)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a,b])$ telle que*

*i) (bornitude) il existe $M>0$ telle que $\sup_n \|f_n\|_\infty \le M$ ;*

*ii) (uniforme équi-continuité) pour tout $\varepsilon>0$, il existe un $\delta>0$ tel que pour tout $x$, $y\in[a,b]$,*

$$|x-y|\le\delta \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)-f_n(y)| \le\varepsilon.$$

*Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f\in\mathcal{C}([a,b])$ telles que $f_{\sigma(n)}$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.*

*Réciproquement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a,b])$ qui converge uniformément, alors elle est bornée et uniformément équi-continue.*

*Démonstration.* **Etape 1 : définition de la fonction $f$ sur $D := \mathbb{Q}\cap[a,b]$.** L'ensemble $D$ étant dénombrable, on peut énumérer ses éléments en une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. D'après la propriété de bornitude i), pour tout $j\in\mathbb{N}$, la suite numérique $(f_n(a_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Nous allons appliquer le principe d'extraction diagonal de sous-suite. Pour $j=0$, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(f_{\sigma_0(n)}(a_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $f(a_0)\in\mathbb{R}$ tels que $f_{\sigma_0(n)}(a_0)\to f(a_0)$. Pour un certain $k\in\mathbb{N}$, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0,\dots,\sigma_k : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $f(a_0),\dots,f(a_k)\in\mathbb{R}$ tels que

$$f_{\sigma_j\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}(a_j)\to f(a_j) \quad \text{pour tout } 0\le j\le k.$$

La suite $(f_{\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}(a_k))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut de nouveau en extraire une sous-suite notée $(f_{\sigma_{k+1}\circ\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}(a_k))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $f(a_{k+1})\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons

$$f_{\sigma(n)} := f_{\sigma_n\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}$$

de sorte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{\sigma(n)}(a_k))_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(f_{\sigma_k \circ \cdots \circ \sigma_0(n)}(a_k))_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\sigma(n)}(a_k) = f(a_k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{2.3.1}$$

**Etape 2 : convergence simple.** Montrons que pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soient $\varepsilon$ et $\delta$ comme dans la définition de l'uniforme équi-continuité. Par densité de $D$ dans $[a,b]$, il existe un $a_k \in D$ tel que $|x - a_k| \leq \delta$. Par conséquent, pour tout $n$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \\ &\quad \leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a_k)| + |f_{\sigma(n)}(a_k) - f_{\sigma(m)}(a_k)| + |f_{\sigma(m)}(a_k) - f_{\sigma(m)}(x)| \\ &\quad \leq 2\varepsilon + |f_{\sigma(n)}(a_k) - f_{\sigma(m)}(a_k)|. \end{aligned}$$

Comme $a_k \in D$, d'après l'étape 1, la suite numérique $(f_{\sigma(n)}(a_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc est de Cauchy. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N$, on a $|f_{\sigma(n)}(a_k) - f_{\sigma(m)}(a_k)| \leq \varepsilon$, ce qui implique que

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci montre effectivement que $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc il existe un $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$.

**Etape 3 : uniforme continuité de $f$.** D'après la propriété d'uniforme équi-continuité de $f$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x$, $y \in [a,b]$ avec $|x - y| \leq \delta$, alors

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(y)| \ \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient que

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien l'uniforme continuité de $f$ sur $[a,b]$.

**Etape 4 : convergence uniforme.** Soient $\varepsilon$ et $\delta$ donnés par la propriété ii). Par compacité de l'intervalle $[a,b]$, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_{N_\varepsilon} \in D$ tels que $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} ]a_i - \delta/2, a_i + \delta/2[$. Donc si $x \in [a,b]$, il existe $i \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$ tel que $x \in ]a_i - \delta/2, a_i + \delta/2[$ et

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| &\leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a_i)| + |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| \ + |f(a_i) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon + \max_{1\leq i\leq N_\varepsilon} |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'uniforme équicontinuité de la suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et l'uniforme continuité de $f$ établie à l'étape 3. D'après l'étape 1, on en déduit que $|f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ dès lors que $n \geq n_i$ (qui ne dépend que de $\varepsilon$ et de $a_i$). En notant $n_\varepsilon := \max\{n_1, \ldots, n_{N_\varepsilon}\}$, il vient : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in [a,b]$. On en déduit la convergence uniforme de $f_{\sigma(n)}$ vers $f$ sur $[a,b]$.

**Etape 5 : Réciproque.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a,b])$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a,b])$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$ pour tout $n \geq N$. Comme les fonctions $f$, $f_0, \ldots, f_N$ sont continues sur le compact $[a,b]$, elles sont uniformément continues. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $\delta_0, \ldots, \delta_N > 0$ tels que pour tout $x, y \in [a,b]$

$$|x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$|x-y| \leq \delta_i \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N.$$

On définit $\delta := \min(\eta, \delta_0, \dots, \delta_N)$ de sorte que si $x$ et $y \in [a,b]$, alors

$$|x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |f_i(x)-f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x, y \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |f_n(x)-f_n(y)| &\leq |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f(y)| + |f(y)-f_n(y)| \\ &\leq 2\|f-f_n\|_\infty + |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient finalement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien uniformément équi-continue. $\square$

# Chapitre 3

# Espaces de Lebesgue

Par simplicité, non présentons ici les espaces de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue (notée dorénavant $\lambda$). Cependant l'ensemble des résultats des sections 1 et 2 restent vrais dans n'importe quel espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ où $X$ est un ensemble, $\mathcal{A}$ est une tribu sur $X$ et $\mu$ une mesure postive sur $\mathcal{A}$.

## 3.1 Premières définitions et propriétés

**Définition 3.1.1.** Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble Lebesgue mesurable. On définit

$$\mathcal{L}^p(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \ \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} < +\infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} := \begin{cases} \left( \displaystyle\int_E |f|^p dx \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : \ \lambda(\{|f| > C\}) = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Commençons par établir deux inégalités fondamentales en théorie de l'intégration.

**Proposition 3.1.2 (Inégalité de Hölder).** *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in \mathcal{L}^p(E)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(E)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(E)$ et*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(E)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} \|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(E)}.$$

*Démonstration.* Par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$, pour $a, b > 0$ et $1 \leq p, p' < \infty$ avec $1/p + 1/p' = 1$, on a

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(a^{p'}) \leq \log \left( \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \right).$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient l'*inégalité de Young*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

En prenant $a = |f(x)|/\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)}$ et $b = |g(x)|/\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(E)}$ et en intégrant sur $E$, on obtient l'inégalité voulue.

Dans l'un des cas $p = 1$ ou $p = \infty$, le résultat est immédiat par définition du sup-essentiel. □

**Proposition 3.1.3 (Inégalité de Minkowski).** *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $f$, $g \in \mathcal{L}^p(E)$, on a*

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p(E)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)}.$$

*Démonstration.* On commence par le cas $p = \infty$. Par définition du sup-essentiel, $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$ et $|g(x)| \leq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$ pour presque tout $x \in E$, d'où

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)},$$

pour presque tout $x \in E$, et donc $\|f+g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(E)}$.

Si $p = 1$, on a

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^1(E)} = \int_E |f+g|\,dx \leq \int_E (|f|+|g|)\,dx \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(E)}.$$

Enfin, si $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{\mathcal{L}^p(E)} &= \int_E |f+g|^p\,dx = \int_E |f+g||f+g|^{p-1}\,dx \\
&\leq \int_E |f||f+g|^{p-1}\,dx + \int_E |g||f+g|^{p-1}\,dx \\
&\leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)}) \left(\int_E (|f+g|^{p-1})^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \\
&= (\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(E)}) \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(E)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat. □

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $\mathcal{L}^p(E) \ni u \mapsto \|u\|_{\mathcal{L}^p(E)}$ satisfait l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(E)$ et $\|0\|_{\mathcal{L}^p(E)} = 0$. Malheureusement, $\|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} = 0$ n'implique pas forcément que $f = 0$, ce qui montre que l'application $\mathcal{L}^p(E) \ni u \mapsto \|u\|_{\mathcal{L}^p(E)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(E)$ (c'est en fait une semi-norme). En effet, on a le résultat suivant qui caractérise toutes les fonctions de semi-norme nulle :

**Proposition 3.1.4.** *Soit $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable telle que*

$$\int_E f\,dx = 0.$$

*Alors $f(x) = 0$ presque pour tout $x \in E$.*

*Démonstration.* Définissons les ensembles mesurables $E_n := \{f \geq 1/n\}$. La suite d'ensemble $(E_n)$ est croissante au sens de l'inclusion et $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\lambda(E_n) \leq \int_{E_n} f\,dx \leq \int_E f\,d\mu = 0,$$

et donc, $\lambda(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage à la limite que

$$\lambda(\{f > 0\}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = 0,$$

ce qui montre bien que $f = 0$ p.p. dans $E$. □

Etant données deux fonctions mesurables $f$ et $g : E \to [-\infty, +\infty]$, on dit que $f \sim g$, si $f(x) = g(x)$ presque pour tout $x \in E$. On peut montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) dans la classe des fonctions mesurables. Les espaces $\mathcal{L}^p(E)$ peuvent être rendus normés en considérant l'espace quotient $\mathcal{L}^p(E)/\sim$ noté dorénavant $L^p(E)$. Si $f \in \mathcal{L}^p(E)$, on notera $[f]$ sa classe d'équivalence et par définition de la norme dans un espace quotient, on a

$$\|[f]\|_{L^p(E)} = \inf_{f\in[f]} \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(E)} \quad \text{pour tout } f \in [f].$$

Par abus de notation, on identifiera systématiquement une fonction avec sa classe d'équivalence.

**Définition 3.1.5.** Soit $f \in L^p(E)$, on note

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(E)} = \begin{cases} \left(\int_E |f|^p dx\right)^{1/p} & \text{si } 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les inégalités de Hölder et Minkowski restent vraies dans les $L^p(E)$.

**Proposition 3.1.6 (Inégalité de Hölder).** *Soient $1 \le p \le \infty$ et $p' \ge 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in L^p(E)$ et $g \in L^{p'}(E)$ alors $fg \in L^1(E)$ et*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

**Proposition 3.1.7 (Inégalité de Minkowski).** *Pour $1 \le p \le \infty$ et tout $f$, $g \in L^p(E)$, on a*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Proposition 3.1.8.** *Pour tout $1 \le p \le \infty$, l'application $L^p(E) \ni f \mapsto \|f\|_p$ définit une norme sur $L^p(E)$. De plus, pour $p = 2$, l'application*

$$(f, g) \in L^2(E) \times L^2(E) \mapsto \langle f, g\rangle := \int_E fg\,dx.$$

*définit un produit scalaire sur $L^2(E)$.*

*Démonstration.* D'après la Proposition 3.1.4, si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ p.p. dans $E$, et donc $f = 0$ dans $L^p(E)$. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(E)$. Enfin l'inégalité triangulaire n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Si $p = 2$, l'inégalité de Hölder (Cauchy-Schwarz dans ce cas) assure que l'intégrale $\int_E fg\,dx$ est bien définie pour $f$ et $g \in L^2(E)$. De plus, il s'agit clairement d'une forme bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) symétrique définie positive (d'après la Proposition 3.1.4) ce qui assure que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est effectivement un produit scalaire sur $L^2(E)$. □

## 3.2 Complétude

**Théorème 3.2.1 (Riesz-Fischer).** *Pour tout $1 \le p \le \infty$, l'espace $L^p(E)$ est complet.*

*Démonstration.* Supposons d'abord que $1 \le p < \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(E)$. Grâce à la propriété de Cauchy, on construit par récurrence une sous-suite $(f_{n_j})_{j\ge1}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la propriété

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \le 2^{-j} \quad \text{pour tout } j \ge 1.$$

Soit $u_k(x) = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, alors la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est croissante et

$$\|u_k\|_p \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} \leq 1.$$

Par conséquent, le théorème de convergence monotone assure que

$$\int_E |u|^p \, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_E |u_k|^p \, dx \leq 1,$$

où l'on a posé $u := \lim_k u_k = \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$. Ceci montre que $u(x) < \infty$ presque pour tout $x \in E$, et donc la série

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \left(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right)$$

converge vers une limite $f(x)$ presque pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = 0$ sur l'ensemble Lebesgue negligeable sur lequel la série précédente ne converge pas. Comme la somme précédente se téléscope, on en déduit que $f_{n_j} \to f$ p.p. dans $E$. La fonction $f$ ainsi définie est mesurable comme limite presque partout d'une suite de fonctions mesurables. De plus, le lemme de Fatou assure que

$$\int_E |f|^p \, dx \leq \int_E |f_{n_1}|^p \, dx + \int_E \liminf_{k\to+\infty} |u_k|^p \, dx \leq \int_E |f_{n_1}|^p \, dx + 1 < \infty,$$

ce que assure que $f \in L^p(E)$. Comme $|f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + u \in L^p(E)$, le théorème de convergence dominée montre que $f_{n_j} \to f$ dans $L^p(E)$. Montrons que toute la suite $f_n \to f$ dans $L^p(E)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le critère de Cauchy, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$. Soit $j$ assez grand de sorte que $n_j \geq N$, alors il vient que

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f\|_p \leq \varepsilon + \|f_{n_j} - f\|_p.$$

En faisant tendre $j \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on obtient la convergence souhaitée.

Pour $p = \infty$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(E)$, alors il existe un ensemble Lebesgue négligeable $A \subset E$ tel que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \text{ pour tout } x \in E \setminus A \text{ et tout } m, n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.1}$$

Donc si $x \in E \setminus A$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, elle admet donc une limite notée $f(x)$. Par ailleurs, on pose $f(x) = 0$ si $x \in A$. La fonction $f$ ainsi définie est mesurable comme limite presque partout d'une suite de fonctions mesurables. De plus, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(E)$ elle est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc par passage à la limite dans la première inégalité de (3.2.1), il vient $|f(x)| \leq M$ presque pour tout $x \in E$ soit $f \in L^\infty(E)$. Enfin d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc par passage à la limite dans la deuxième inégalité de (3.2.1), il vient $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et presque tout $x \in E$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que $f_n \to f$ dans $L^\infty(E)$. □

**Corollaire 3.2.2.** *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, les espaces $L^p(E)$ sont des espaces de Banach et $L^2(E)$ est un espace de Hilbert.*

La démonstration du théorème de Riesz-Fischer permet de montrer une sorte de réciproque du théorème de la convergence dominée.

**Corollaire 3.2.3.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(E)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(E)$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $g \in L^p(E)$ telles que $f_{n_j} \to f$ et $|f_{n_j}| \le g$ p.p. dans $E$.*

*Démonstration.* Le cas $p = \infty$ est évident par définition du sup-essentiel. Dans ce cas, il n'y a même pas besoin d'extraire de sous-suite. Si $1 \le p < \infty$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(E)$. On reprend alors la démonstration du théorème Riesz-Fischer qui montre l'existence d'une sous-suite $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $f_{n_j} \to f$ p.p. dans $E$. Par ailleurs, en posant $g = |f_{n_1}| + u \in L^p(E)$, on en déduit aussi que $|f_{n_j}| \le g$ p.p. dans $E$. □

## 3.3 Résultats de densité

**Théorème 3.3.1.** *Pour tout $1 \le p \le \infty$ l'espace des fonctions étagées est dense dans $L^p(E)$.*

*Démonstration.* Soit $f \in L^p(E)$, en décomposant $f = f_+ - f_-$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $f \ge 0$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions étagées définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$, on définit les ensembles mesurables

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad F_n := \{f \ge n\}.$$

et pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(x) + n\chi_{F_n}(x).$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge presque partout vers $f$.

Si $p = \infty$, alors pour tout $n \ge \|f\|_\infty$, on a $|f_n(x) - f(x)| \le 2^{-n}$ presque pour tout $x \in E$, et donc $\|f_n - f\|_\infty \le 2^{-n} \to 0$.

Si $1 \le p < \infty$, comme $f_n(x) \nearrow f(x)$ pour presque tout $x \in E$, on en déduit que $|f(x) - f_n(x)|^p \to 0$ et $|f(x) - f_n(x)|^p \le 2^p f(x)^p$ presque pour tout $x \in E$, d'où par le théorème de la convergence dominée $\|f - f_n\|_p \to 0$. □

**Remarque 3.3.2.** La conclusion du théorème 3.3.1 reste vraie si l'on remplace la mesure de Lebesgue par n'importe quelle mesure Borélienne.

Afin de montrer un résultat de densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue, nous aurons besoin d'une propriété de régularité de la mesure de Lebesgue.

**Proposition 3.3.3.** *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable. Alors*

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(U) : U \text{ ouvert avec } E \subset U\} = \sup\{\lambda(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}.$$

*Démonstration.* Par définition de la mesure de Lebesgue,

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} ]a_i, b_i[ \right\} \in [0, +\infty].$$

On a toujours que $\lambda(E) \le \inf\{\lambda(U) : U$ ouvert avec $E \subset U\}$, il s'agit donc de montrer l'autre inégalité. Si $\lambda(E) = +\infty$, celle-ci est évidente. Si en revanche $\lambda(E) < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable d'intervalles ouverts $(]a_i, b_i[)_{i\ge1}$ telle que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} ]a_i, b_i[, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i) \le \lambda(E) + \varepsilon.$$

Posons $U := \bigcup_{i=1}^{+\infty} ]a_i, b_i[$ qui est un ensemble ouvert. On a donc $E \subset U$ et

$$\lambda(E) \leq \lambda(U) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(]a_i, b_i[) = \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i) \leq \lambda(E) + \varepsilon,$$

ce qui montre la deuxième inégalité.

On a toujours que $\lambda(E) \geq \sup\{\lambda(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}$. Pour établir la deuxième inégalité, on applique ce qu'on vient de montrer à l'ensemble borné $E^c \cap [-n, n]$, où $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors un ensemble ouvert $V_n \supset E^c \cap [-n, n]$ tel que $\lambda(V_n) \leq \lambda(E^c \cap [-n, n]) + \varepsilon$. Soit $F_n := V_n^c$ qui est un fermé satisfaisant $F_n \subset E \cup [-n, n]^c$ et

$$\lambda((E \setminus F_n) \cap [-n, n]) = \lambda((V_n \setminus (E^c)) \cap [-n, n]) = \lambda(V_n \cap [-n, n]) - \lambda(E^c \cap [-n, n]) \leq \varepsilon.$$

On pose $K_n = F_n \cap [-n, n]$ qui est un ensemble compact satisfaisant $K_n \subset E \cap [-n, n] \subset E$ et

$$\begin{aligned} \lambda(E \cap [-n, n]) &= \lambda((E \setminus F_n) \cap [-n, n]) + \lambda(K_n) \leq \lambda(K_n) + \varepsilon \\ &\leq \sup\{\lambda(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs, $\lambda(E \cap [-n, n]) \to \lambda(E)$ on obtient la deuxième inégalité en faisant tendre $n \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$. □

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le support de $f$, noté Supp$f$ désigne l'ensemble fermé $\overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$. Si $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ l'espace $\mathcal{C}_c(I)$ est l'ensemble des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que Supp$f$ est un compact inclu dans $I$. En particulier, une telle fonction s'annule au voisinage des bornes de l'intervalle $I$.

**Théorème 3.3.4.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(I)$ est dense dans $L^p(I)$.*

*Démonstration.* Soit $f \in L^p(I)$. D'après le théorème 3.3.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. On est donc ramené à montrer que toute fonction étagée à support compacte peut être approchée par une fonction de $\mathcal{C}_c(I)$ pour la norme $L^p(I)$.

On suppose que $I = ]a, b[$ et on pose alors $a_n = \max(a + 1/n, -n)$ et $b_n = \min(b - 1/n, n)$. La suite de compacts $[a_n, b_n]$ est croissante et $\bigcup_n [a_n, b_n] = I$. Le théorème de la convergence dominée assure que $\|g - \chi_{[a_n, b_n]} g\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $g = 0$ au voisinage de $a$ et $b$.

Par linéarité, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $A$ tel que $\overline{A} \subset I$ (autrement dit $\chi_A$ est à support compact dans $I$). Comme $A$ est d'adhérence compacte, il est borné et donc $\lambda(A) < +\infty$. Par conséquent la proposition 3.3.3 assure, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un ouvert $U$ et d'un compact $K$ tels que $K \subset E \subset U$ et $\lambda(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Par ailleurs, on peut supposer que $\overline{U}$ est compact et inclu dans $I$. On définit alors la fonction

$$h(x) := \frac{\text{dist}(x, U^c)}{\text{dist}(x, U^c) + \text{dist}(x, K)}, \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Notons que $h$ est bien définie puisque $K \cap U^c = \emptyset$, elle est continue sur $I$ comme somme et quotient de fonctions continue (rappelons que la fonction distance est 1-Lipschitz), nulle en dehors de $U$ et identiquement égale à 1 sur $K$. D'où, comme $\chi_K \leq h \leq \chi_U$,

$$\int_I |h - \chi_A|^p \, dx \leq \lambda(U \setminus K) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Nous allons à présent améliorer le résultat précédent en montrant que les fonctions régulières et à support compact sont dense dans les espaces de Lebesgue. Si $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables à tout ordre et telles que $\mathrm{Supp} f$ est un compact inclu dans $I$.

**Définition 3.3.5.** Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\rho \geq 0$, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset [-1, 1]$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) := n\rho(nx)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\,dx = 1$ et $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. On dit que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

A titre d'exemple, on peut vérifier que la fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x) := \begin{cases} c\, e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

où la constante $c := \left(\int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x^2-1}}\,dx\right)^{-1}$, satisfait les propriétés requises ci-dessus.

**Définition 3.3.6.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable (*i.e.* dans $L^1([-k, k])$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on note $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$) on définit le produit de convolution

$$f * \rho_n(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x-y) f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_n(y)\,dy, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 3.3.7.** Notons que l'intégrale est bien définie car $y \mapsto \rho_n(x-y)$ s'annule en dehors de $[x - 1/n, x + 1/n]$, elle est bornée sur cet intervalle et $f$ est intégrable sur cet intervalle.

**Lemme 3.3.8.** *La fonction $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus*

- *si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{Supp}(f * \rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f) + [-1/n, 1/n]$ et $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ ;*
- *si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

*Démonstration.* Montrons d'abord que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < 1$, on calcule

$$\frac{f * \rho_n(x+h) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_n(x+h-y) - \rho_n(x-y)}{h} f(y)\,dy.$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\rho_n(x+h-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y) \to \rho_n'(x-y) f(y)$ quand $h \to 0$ car $\rho_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, le théorème des accroissements finis montre que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\left|\frac{\rho_n(x+h-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y)\right| \leq \max_{\mathbb{R}} |\rho_n'| \chi_{[x-2,x+2]}(y)|f(y)|$ car $\rho_n(x+y-h) = \rho_n(x-y) = 0$ si $y \notin [x-2, x+2]$. Notons que $\rho_n'$ étant également $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ elle est bornée sur $\mathbb{R}$ ce qui montre que $\max_{\mathbb{R}} |\rho_n'| \chi_{[x-2,x+2]}|f| \in L^1(\mathbb{R})$. Le théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f * \rho_n(x+h) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \rho_n'(x-y) f(y)\,dy,$$

ce qui montre que $f * \rho_n$ est dérivable et donc continue. Par récurrence, on montre ainsi que $f * \rho_n$ est dérivable à tout ordre ce qui assure que $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors il existe $a$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Supp}(f) \subset [a, b]$. Comme $f$ est continue sur le compact $[a, b]$ (et donc bornée) et nulle à l'extérieur de $[a, b]$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. De plus si $x \notin \mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n)$ et $y \in \mathrm{Supp}(\rho_n)$, alors $x - y \notin \mathrm{Supp}(f)$ et donc $f(x-y) = 0$. Par conséquent,

$$f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_n(y)\,dy = \int_{\mathrm{Supp}(\rho_n)} f(x-y)\rho_n(y)\,dy = 0,$$

ce qui montre que le support de $f * \rho_n$ (qui est toujours un fermé) est inclu dans $\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n) = \mathrm{Supp}(f) + [-1/n, 1/n]$ et en particulier que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Comme $f$ est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tels que $|x - x'| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand de sorte que $1/n \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour tout $y \in [-1/n, 1/n]$, on a $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon$. On multiplie alors cette inégalité par $\rho_n(y) \geq 0$, puis en intégrant sur $\mathbb{R}$, il vient

$$|f(x) - f * \rho_n(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)\, dy \leq \varepsilon, \quad (3.3.1)$$

où l'on a utilisé le fait que $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\, dy = 1$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de $\delta$ donc $\varepsilon$) tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f * \rho_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $f * \rho_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$ et donc dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Si $1 \leq p < \infty$, comme $f(x) = f * \rho_n(x) = 0$ si $x \notin [a - 1/n, b + 1/n]$, on peut élever l'expression (3.3.1) à la puissance $p$, puis par intégration obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx = \int_{a-1/n}^{b+1/n} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx \leq \varepsilon^p(b - a + 2/n) \leq \varepsilon^p(b - a + 2), \quad (3.3.2)$$

ce qui montre également que $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p < \infty$.‘

Supposons enfin que $f \in L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p < \infty$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-k}^{k} |f(x)|\, dx \leq \|f\|_p (2k)^{1-1/p} < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, et donc que le produit de convolution $f * \rho_n$ est bien défini. D'après le Théorème 3.3.4, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Par ailleurs, d'après (3.3.2), on a $\|g - g * \rho_n\|_p \leq \varepsilon$ pour $n$ assez grand. Par conséquent,

$$\|f - f * \rho_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g * \rho_n\|_p + \|(g - f) * \rho_n\|_p \leq 2\varepsilon + \|(g - f) * \rho_n\|_p.$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder et le fait que $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\, dy = 1$,

$$\begin{aligned} |(g - f) * \rho_n(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy \right|^p \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)^{1/p}\rho_n(y)^{1/p'}\, dy \right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x-y) - f(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy, \end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport à $x$ et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient que

$$\|(g - f) * \rho_n\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x-y) - u(x-y)|^p\, dx \right) \rho_n(y)\, dy = \|g - f\|_p^p.$$

Par conséquent, $\|f - f * \rho_n\|_p \leq 3\varepsilon$, ce qui conclut la preuve du lemme. □

**Corollaire 3.3.9.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est dense dans $L^p(I)$.*

*Démonstration.* D'après le théorème 3.3.4, pour tout $f \in L^p(I)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $g \in \mathcal{C}_c(I)$ tel que $\|f-g\|_p \leq \varepsilon$. On étend $g$ par zéro en dehors de $I$ et on note $\tilde{g}$ cette extension. Alors $\tilde{g} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Supp}(\tilde{g}) \subset I$. D'après le lemme 3.3.8, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{Supp}(\tilde{g} * \rho_n) \subset \mathrm{Supp}(\tilde{g}) + [-1/n, 1/n] \subset I$ et $\|\tilde{g} * \rho_n - \tilde{g}\|_p \leq \varepsilon$. Finalement, on obtient que $f_n := \tilde{g} * \rho_n|_I \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \tilde{g} * \rho_n\|_p \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclue la preuve du corollaire. □

**Corollaire 3.3.10.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ telle que*

$$\int_I f\varphi \, dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

*Alors $f = 0$ presque partout sur $I$.*

*Démonstration.* Soit $[a, b] \subset I$ un sous-intervalle fermé borné. Alors $f \in L^1([a, b])$ et d'après le lemme 3.3.8, $f * \rho_n \to f$ dans $L^1([a, b])$. Par conséquent, la réciproque du théorème de convergence dominée (corollaire 3.2.3), on a que $f * \rho_n \to f$ p.p. sur $[a, b]$. Soit $x \in [a, b]$ tel que $f * \rho_n(x) \to f(x)$ et $n \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $]x - 1/n, x + 1/n[\subset I$. Alors on prend $\varphi = \rho_n(x - \cdot) \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ comme fonction test et il vient que

$$f * \rho_n(x) = \int_{x-1/n}^{x+1/n} f(y)\rho_n(x-y) \, dy = \int_I f(y)\rho_n(x-y) \, dy = 0.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, il vient que $f(x) = 0$, et donc $f = 0$ p.p. sur $[a, b]$. Comme ceci vaut pour tout intervalle borné $[a, b] \subset I$, on en déduit que $f = 0$ p.p. sur $I$. □

## 3.4 Séparabilité

Nous somme à présent en mesure de discuter la séparabilité des espaces de Lebesgue.

**Proposition 3.4.1.** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(I)$ est séparable.*

*Démonstration.* Notons $I = ]a, b[$ et $a_n := \max(-n, a + 1/n)$, $b_n = \min(n, b - 1/n)$ de sorte que les intervalles $[a_n, b_n]$ sont compacts, croissants et $\bigcup_n [a_n, b_n] = ]a, b[$. Par conséquent, $\mathcal{C}_c(I) \subset \bigcup_n \mathcal{C}([a_n, b_n])$. D'après la proposition 2.2.2, les espaces $\mathcal{C}([a_n, b_n])$ sont séparables par rapport à la convergence uniforme. Or les ensembles $[a_n, b_n]$ étant bornés, la convergence uniforme sur $[a_n, b_n]$ implique la convergence dans $L^p([a_n, b_n])$ pour tout $1 \leq p < \infty$ car

$$\int_{a_n}^{b_n} |f - g|^p \, dx \leq (b_n - a_n) \sup_{[a_n, b_n]} |f - g|^p, \quad \text{pour tout } \ f, g \in \mathcal{C}([a_n, b_n]).$$

Par conséquent, l'espace $\mathcal{C}([a_n, b_n])$ est séparable pour la convergence dans $L^p([a_n, b_n])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un ensemble $D_n$ dénombrable dense dans $\mathcal{C}([a_n, b_n])$ pour la convergence dans $L^p([a_n, b_n])$.

Posons $D := \bigcup_n D_n$ qui est par conséquent dénombrable. Si l'on énumère les éléments de $D$ en une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, chacune des fonctions $f_i$ est une fonction continue sur un sous-ensemble compact de $I$. On étend alors $f_i$ par zéro sur $I$, et on note $\tilde{f}_i$ cette extension qui n'est *a priori* plus continue mais toutefois dans $L^p(I)$. L'ensemble $\tilde{D} := \{\tilde{f}_i, i \in \mathbb{N}\}$ est alors un sous-ensemble dénombrable de

$L^p(I)$. Montrons qu'il est dense. Pour ce faire, soit $f \in L^p(I)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 3.3.4, il existe $g \in \mathcal{C}_c(I)$ tel que $\|f - g\|_{L^p(I)} \leq \varepsilon$. Ensuite il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $g \in \mathcal{C}([a_n, b_n])$ et $\mathrm{Supp}(g) \subset [a_n, b_n]$. Donc il existe un $h \in D_n$ tel que $\|g - h\|_{L^p([a_n,b_n])} \leq \varepsilon$. Soit $\tilde{h}$ l'extension par zéro de $h$ sur $I$. Alors $\tilde{h} \in D$ et comme $g = 0$ sur $I \setminus [a_n, b_n]$, il vient

$$\int_a^b |\tilde{h} - g|^p \, dx = \int_{a_n}^{b_n} |h - g|^p \, dx \leq \varepsilon^p.$$

Finalement, on a que $\|f - \tilde{h}\|_{L^p(I)} \leq \|f - g\|_{L^p(I)} + \|g - \tilde{h}\|_{L^p(I)} \leq 2\varepsilon$, ce qui montre la densité de $\tilde{D}$ dans $L^p(I)$. $\square$

**Proposition 3.4.2.** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'espace $L^\infty(I)$ n'est pas séparable.*

*Démonstration.* Notons $I = ]a, b[$ et soit $x \in I$. Alors la famille $X := \{\chi_{]x-r,x+r[} : b - x < r < x - a\}$ est non dénombrable et si $b - x < r' < r < x - a$, alors $\|\chi_{]x-r,x+r[} - \chi_{]x-r',x+r'[}\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble $D = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ de $L^\infty(I)$ dénombrable et dense. Soit $\Phi : X \to \mathbb{N}$ l'application qui à chaque $\chi \in X$ associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\chi - f_n\|_\infty \leq 1/3$. Cette application est bien définie par densité de $D$ dans $L^\infty(I)$. Supposons maintenant que $\Phi(\chi_1) = \Phi(\chi_2) = n$, alors $\|\chi_1 - f_n\|_\infty \leq 1/3$ et $\|\chi_2 - f_n\|_\infty \leq 1/3$, ce qui implique par l'inégalité triangulaire que $\|\chi_1 - \chi_2\|_\infty \leq 2/3 < 1$. Comme $\chi_1$ et $\chi_2 \in X$ sont des fonctions caractéristiques, alors nécessairement $\chi_1 = \chi_2$ dans $L^\infty(I)$ ce qui montre l'injectivité de $\Phi$. L'ensemble $X$ étant non dénombrable, on aboutit à une contradition. $\square$

## 3.5 Critère de compacité

Pour finir, nous établissons un critère compacité dans les espaces de Lebesgue.

**Théorème 3.5.1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov).** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $L^p(\mathbb{R})$, avec $1 \leq p < \infty$, telle que*

*(i)* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty$ *;*

*(ii)* $\sup_{|y|\leq\delta} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x + y) - f_n(x)|^p \, dx \to 0$ *quand* $\delta \to 0$.

*Alors, pour tout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$, la suite $(f_{n|_I})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^p(I)$.*

*Démonstration.* Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante comme dans la définition 3.3.5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(f_n * \rho_{k|_{\overline{I}}})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(\overline{I})$. Notons que $\overline{I}$ est un intervalle fermé borné. Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n * \rho_{k|_{\overline{I}}})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(\overline{I})$. Pour faire, nous allons appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. Tout d'abord d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in \overline{I}$, on a

$$|f_n * \rho_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x - y)| \, \rho_k(y) \, dy \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \, \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq C_k,$$

où, d'après l'hypothèse (i), la constante $C_k > 0$ est indépendante de $n$ et de $x$. Par ailleurs, si $x$ et

$x' \in \overline{I}$,

$$\begin{aligned}
|f_n * \rho_k(x) - f_n * \rho_k(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x-y) - f_n(x'-y)|\; \rho_k(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f_n(x-x'+z) - f_n(z)|\; \rho_k(x'-z)\, dz \\
&\leq \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \left( \sup_{|y|\leq|x-x'|} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n(z+y) - f_n(z)|^p\, dz \right)^{1/p} \\
&= \omega_k(|x-x'|),
\end{aligned}$$

où, d'après l'hypothèse (ii), $\omega_k(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$. Ceci montre l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_n * \rho_k{}_{|_{\overline{I}}})_{n\in\mathbb{N}}$, et le théorème d'Ascoli-Arzela assure pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'existence d'une sous-suite $(f_{\sigma_k(n)} * \rho_k{}_{|_{\overline{I}}})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{C}(\overline{I})$. Comme $I$ est un intervalle borné, on en déduit que $(f_{\sigma_k(n)} * \rho_k{}_{|_{\overline{I}}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(I)$.

Nous allons à présent montrer que pour $k$ assez grand, la sous-suite $(f_{\sigma_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(I)$ ce qui montrera qu'elle converge dans cet espace par le théorème de Riesz-Fisher. Pour ce faire, on écrit grâce à l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}
\|f_{\sigma_k(n)} - f_{\sigma_k(m)}\|_{L^p(I)} &\leq \|f_{\sigma_k(n)} - f_{\sigma_k(n)} * \rho_k\|_{L^p(I)} \\
&\quad + \|f_{\sigma_k(n)} * \rho_k - f_{\sigma_k(m)} * \rho_k\|_{L^p(I)} + \|f_{\sigma_k(m)} - f_{\sigma_k(m)} * \rho_k\|_{L^p(I)}. \qquad (3.5.1)
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Supp}(\rho_k) \subset [-1/k, 1/k]$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho_k(y)\, dy = 1$,

$$|f_{\sigma_k(n)}(x) - f_{\sigma_k(n)} * \rho_k(x)| \leq \int_{-1/k}^{1/k} |f_{\sigma_k(n)}(x) - f_{\sigma_k(n)}(x-y)|\; \rho_k(y)\, dy.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance $p$, en intégrant par rapport à $x \in I$ et en appliquant l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}
\int_I |f_{\sigma_k(n)}(x) - f_{\sigma_k(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx &\leq \int_{-1/k}^{1/k} \left( \int_I |f_{\sigma_k(n)}(x) - f_{\sigma_k(n)}(x-y)|^p\, dx \right) \rho_k(y)\, dy \\
&\leq \sup_{|y|\leq 1/k} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n(x) - f_n(x-y)|^p\, dx.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii), on en déduit alors que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_{\sigma_k(n)}(x) - f_{\sigma_k(n)} * \rho_k(x)|\, dx = 0.$$

Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_{\sigma_{k_0}(n)}(x) - f_{\sigma_{k_0}(n)} * \rho_{k_0}(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La suite $(f_{\sigma_{k_0}(n)} * \rho_{k_0}{}_{|_{\overline{I}}})_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans $L^p(I)$, elle y est de Cauchy et on peut trouver un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N_0$,

$$\|f_{\sigma_{k_0}(n)} * \rho_{k_0} - f_{\sigma_{k_0}(m)} * \rho_{k_0}\|_{L^p(I)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc si $m$, $n \geq N_0$, (3.5.1) donne $\|f_{\sigma_{k_0}(n)} - f_{\sigma_{k_0}(m)}\|_{L^p(I)} \leq \varepsilon$, ce qui montre que $(f_{\sigma_{k_0}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est Cauchy dans $L^p(I)$, et donc qu'elle converge dans cet espace. □

# Chapitre 4

# Applications linéaires continues et dualité

## 4.1 Applications linéaires continues

### 4.1.1 Définition et premières propriétés

On considère deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ et des applications linéaires de $E$ dans $F$.

**Proposition 4.1.1.** *Une application linéaire $T : E \to F$ est continue si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|T(u)\|_F \leq C\|u\|_E. \tag{4.1.1}$$

*Démonstration.* Si (4.1.1) est vérifié, alors pour tout $u$, $v \in E$, par linéarité de $T$, on a $\|T(u) - T(v)\|_F = \|T(u-v)\|_F \leq C\|u - v\|_E$, ce qui montre que $L$ est continue.

Réciproquement, si $T$ est continue, elle l'est en particulier en 0. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tels que si $\|u\|_E \leq \delta$, alors $\|T(u)\|_F \leq \varepsilon$. Si $u \in E$ est arbitraire, alors $v := \delta u/\|u\|_E$ satisfait $\|v\|_E = \delta$ et donc

$$\frac{\delta}{\|u\|_E}\|T(u)\|_F = \|T(v)\|_F \leq \varepsilon,$$

soit $\|T(u)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|u\|_E$. □

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$. Il s'agit clairement d'un espace vectoriel. Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on définit la quantité

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|T(u)\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_E \leq 1} \|T(u)\|_F.$$

**Proposition 4.1.2.** *La quantité $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$ ce qui en fait un espace vectoriel normé.*

*Démonstration.* Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $\|\cdot\|_F$ est une norme sur $F$, il vient

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|\lambda T(u)\|_F}{\|u\|_E} = |\lambda| \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|T(u)\|_F}{\|u\|_E} = |\lambda|\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)},$$

ce qui établit l'homogénéité de la norme. On a évidemment que $\|0\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$, et si $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$, alors $\|T(u)\|_F = 0$ pour tout $u \in E$, ce qui implique que $T(u) = 0$ pour tout $u \in E$, soit $T = 0$. Enfin, si $T_1$ et $T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, quel que soit $u \in E$ ($u \neq 0$), on a

$$\|(T_1+T_2)u\|_F = \|T_1(u)+T_2(u)\|_F \leq \|T_1(u)\|_F + \|T_2(u)\|_F \leq (\|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)})\|u\|_E.$$

En divisant par $\|u\|_E$ puis en passant au sup dans le membre de gauche, il vient $\|T_1+T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|T_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|T_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, ce qui montre l'inégalité triangulaire. □

Nous allons maintenant énoncer une condition suffisante pour que $\mathcal{L}(E,F)$ soit un espace de Banach.

**Proposition 4.1.3.** *Si $F$ est complet, alors $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi. En particulier, $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.*

*Démonstration.* Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N$,

$$\frac{\|T_n(u) - T_m(u)\|_F}{\|u\|_E} \leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon, \qquad \text{pour tout } u \in E. \tag{4.1.2}$$

On en déduit que $(T_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $F$ complet, il existe donc $\ell_u \in F$ tel que $T_n(u) \to \ell_u$. On montre facilement que $u \mapsto \ell_u$ est linéaire et l'on note $\ell_u = T(u)$. Comme $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$ elle est bornéee dans cet espace et donc il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C$. Par conséquent, $\|T_n(u)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|u\|_E \leq C\|u\|_E$. Comme $T_n(u) \to T(u)$ dans $F$, alors $\|T_n(u)\|_F \to \|T(u)\|_F$ et il vient par passage à la limite que $\|T(u)\|_F \leq C\|u\|_E$, soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Enfin, dans (4.1.2), on passe à la limite quand $m \to \infty$ et on obtient

$$\frac{\|T_n(u) - T(u)\|_F}{\|u\|_E} \leq \varepsilon, \qquad \text{pour tout } n \geq N \text{ et tout } u \in E.$$

Par passage au sup en $u$ dans le membre de gauche, il s'ensuit que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que $T_n \to T$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. □

### 4.1.2 Dual et bidual

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, on note $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $E$ qui définit le dual topologique de $E$. C'est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|L\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\| \leq 1} |L(x)|,$$

pour laquelle il est complet d'après la proposition 4.1.3. Il s'agit donc d'un espace de Banach, même si $E$ n'en est pas un. Si $L \in E'$ et $x \in E$, on note parfois $\langle L, x\rangle_{E',E}$ (ou $\langle L, x\rangle$ en l'absence d'ambiguité) au lieu de $L(x)$. La caractérisation du dual d'un espace vectoriel normé est un problème majeur en analyse fonctionnelle. Nous verrons par la suite des exemples (espaces de Hilbert, espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev). On note aussi $E''$ le dual de $E'$, qui est le bidual de $E$.

### 4.1.3 Principe de la borne uniforme

Rappelons un résultat classique des espaces métriques complets.

**Théorème 4.1.4 (Baire).** *Soit $(X, d)$ un espace métrique complet.*

*(i) Pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denses dans $X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans $X$ ;*
*(ii) Pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vide dans $X$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans $X$.*

*Démonstration.* L'énoncé (ii) suit de (i) par passage au complémentaire. On montre donc (i). Notons $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, il s'agit de montrer que $\overline{G} = X$, *i.e.*, pour tout $x_0 \in X$ et tout $r_0 > 0$,

$$B(x_0, r_0) \cap G \neq \emptyset. \tag{4.1.3}$$

Puisque $U_0$ est un ouvert dense, il existe un $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_0$ et, ce dernier ensemble étant ouvert, il existe un $0 < r_1 < r_0/2$ tel que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_0$. Par récurrence, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ ayant les propriétés

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap U_n, \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n \geq m$, alors $x_n \in B(x_m, r_m)$ et donc $d(x_n, x_m) < r_m < r_0/2^m$. Par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(X, d)$ complet, et donc il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Or $x_n \in B(x_m, r_m)$ pour tout $n \geq m$ et donc $x \in \overline{B}(x_m, r_m) \subset U_m$ par construction. Finalement, on obtient que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$ et donc (4.1.3) est vérifié. □

Les résultat suivant permet de passer d'une majoration ponctuelle à une majoration uniforme.

**Théorème 4.1.5 (Banach-Steinhaus).** *Soit $E$ un espace de Banach et $F$ un espace vectoriel normé. Si $(T_i)_{i\in I}$ est une famille dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty \quad \textit{pour tout } x \in E,$$

*alors*

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

*Démonstration.* On pose $X_n := \{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F \leq n\}$. Comme $T_i$ est continue, $x \mapsto \|T_i(x)\|_T$ l'est également et donc $x \mapsto \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F$ est sci comme sup de fonctions continues (voir la proposition 1.2.4). Par conséquent, $X_n$ est fermé et, par hypothèse,

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

L'ensemble $E$ étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X_{n_0}$ n'est pas d'intérieur vide. Il existe donc un $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$, soit $\|T_i(x)\|_F \leq n_0$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et tout $i \in I$. Si $x \in \overline{B}(0, 1)$, alors $x_0 + rx \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et donc

$$\|T_i(x)\|_F \leq \frac{1}{r_0}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|T_i(x_0)\|_F\right).$$

Par passage au sup en $x$ dans le membre de gauche, il vient

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|T_i(x_0)\|_F\right),$$

d'où le résultat. □

## 4.2 Espaces de Hilbert

On rappelle qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé $H$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (une forme bilinéaire symétrique et définie positive) complet pour la norme $\| \cdot \|_H := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ associée au produit scalaire.

Les théorèmes suivants sont spécifiques aux espaces de Hilbert et y jouent un rôle fondamental.

**Théorème 4.2.1 (Projection orthogonale).** *Soit $(H, \langle \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $C$ un sous-ensemble de $H$ convexe, fermé et non vide. Pour tout $u \in H$, il existe un unique élément $P_C(u) \in C$, appelé la projection orthogonale de $u$ sur $C$, tel que*

$$\|u - P_C(u)\|_C = \min_{v \in C} \|u - v\|_H.$$

*De plus, $P_C(u)$ est caractérisé par*

$$P_C(u) \in C, \quad \langle u - P_C(u), v - P_C(u) \rangle \le 0 \text{ pour tout } v \in C. \tag{4.2.1}$$

*Démonstration.* On considère le problème de minimisation

$$\alpha := \inf_{v \in C} \|u - v\|_H^2 \tag{4.2.2}$$

Comme $C \neq \emptyset$, on a $\alpha \in [0, +\infty[$. On considère alors une suite minimisante $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $H$ telle que pour tout $n \ge 1$,

$$v_n \in C, \quad \alpha \le \|v_n - u\|_H^2 \le \alpha + \frac{1}{n}. \tag{4.2.3}$$

Par convexité de $C$, $(v_n + v_m)/2 \in C$ pour tout $m$, $n \ge 1$, et donc l'inégalité du parallèlogramme montre que

$$\begin{aligned}
\alpha \le \left\| \frac{v_m + v_n}{2} - u \right\|_H^2 &= \left\| \frac{v_m - u}{2} + \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\
&= 2\left\| \frac{v_m - u}{2} \right\|_H^2 + 2\left\| \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 - \left\| \frac{v_m - u}{2} - \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\
&\le \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|_H^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|v_m - v_n\|_H^2 \le \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

ce qui montre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H$. Il existe donc un élement $v \in H$ tel que $v_n \to v$. L'ensemble $C$ étant fermé, on en déduit que $v \in C$ et par passage à la limite dans (4.2.3) que $\alpha = \|v - u\|_H^2$. Ceci montre l'existence d'une solution au problème de minimisation (4.2.2). Quant à l'unicité, si $v_1 \in C$ et $v_2 \in C$ sont deux solutions, alors par convexité de $C$, on a $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in C$, d'où

$$\alpha \le \left\| \frac{v_1 + v_2}{2} - u \right\|_H^2 = \frac{1}{2}\|v_1 - u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v_2 - u\|_H^2 - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2 = \alpha - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2,$$

ce qui montre que $\|v_1 - v_2\|_H = 0$ et donc que $v_1 = v_2$.

Montrons à présent que l'unique solution de (4.2.2) est caractérisée par (4.2.1). Si $P_C(u)$ est l'unique solution de (4.2.2), alors $P_C(u) \in C$ et, par convexité de $C$, $P_C(u) + t(v - P_C(u)) \in C$ pour tout $t \in ]0, 1[$ et tout $v \in C$. Donc

$$\alpha \leq \|u - P_C(u) - t(v - P_C(u))\|_H^2 = \alpha - 2t\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle + t^2\|v - P_C(u)\|_H^2.$$

En divisant par $t$ puis en passant à la limite quand $t \to 0$, il vient $\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle \leq 0$ comme attendu. Réciproquement, supposons (4.2.1), alors pour tout $v \in C$,

$$\begin{aligned}\|v - u\|_H^2 &= \|v - P_C(u) + P_C(u) - u\|_H^2 \\ &= \|v - P_C(u)\|_H^2 + 2\langle v - P_C(u), P_C(u) - u\rangle + \|P_C(u) - u\|_H^2 \geq \|P_C(u) - u\|_H^2,\end{aligned}$$

ce qui montre, avec $P_C(u) \in C$, que $P_C(u)$ est la solution au problème de minimisation (4.2.2). □

Dans le cas particulier où $C$ est un sous espace vectoriel fermé de $H$, le théorème de la projection orthogonale permet de décomposer l'espace $H$ en la somme directe de $C$ et de son orthogonal.

**Proposition 4.2.2.** *Soit $F$ un sous espace vectoriel fermé de $H$ et $u \in H$. Alors la projection orthogonale $P_F(u)$ de $u$ sur $F$ est caractérisée par*

$$P_F(u) \in F, \quad \langle u - P_F(u), v\rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F.$$

*De plus, en notant $F^\perp = \{v \in H : \langle v, u\rangle = 0 \text{ pour tout } u \in F\}$ l'orthogonal de $F$, on a la décomposition*

$$H = F \oplus F^\perp.$$

*Démonstration.* Comme $F$ est un sous espace vectoriel de $H$, il est non vide (car il contient l'origine) et convexe. La projection orthogonale $P_F(u)$ de $u$ sur $F$ est donc bien définie et est caractérisée par

$$P_F(u) \in F, \quad \langle u - P_F(u), w - P_F(u)\rangle \leq 0 \text{ pour tout } w \in F.$$

Si $v \in F$ est arbitraire, alors $w = P_F(u) \pm v \in F$ car $F$ est un sous espace vectoriel, et donc $\pm\langle u - P_F(u), v\rangle \leq 0$, autrement dit $\langle u - P_F(u), v\rangle = 0$. L'implication réciproque est immédiate.

Tout élément $u \in H$ peut donc s'écrire $u = P_F(u) + (u - P_F(u))$, où $P_F(u) \in F$ et $u - P_F(u) \in F^\perp$ d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur $F$ établie précédemment. Par ailleurs, comme $F^\perp \cap F = \{0\}$, alors on a bien que $H = F \oplus F^\perp$. □

Un corollaire du résultat précédent est l'identification du dual d'un espace de Hilbert $H$ avec $H$ lui même.

**Théorème 4.2.3 (Riesz).** *Soit $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $L \in H'$. Il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$L(u) = \langle f, u\rangle \quad \text{pour tout } u \in F.$$

*De plus, $\|L\|_{H'} = \|f\|_H$.*

*Démonstration.* Si $L = 0$, on prend $f = 0$. Sinon, on pose $M = L^{-1}(\{0\})$ qui est un sous espace vectoriel fermé de $H$. Comme d'après la proposition 4.2.2, $H = M \oplus M^\perp$, on en déduit que $M^\perp \neq \{0\}$ et il existe donc un élement $e \in M^\perp$ avec $e \neq 0$. Alors $L(e) \neq 0$ (car sinon $e \in M$ et donc $e = 0$). On en déduit que $u - \frac{L(u)}{L(e)}e \in M$ donc $\langle u, e\rangle = \frac{L(u)}{L(e)}\|e\|_H^2$, soit $L(u) = \langle \frac{L(e)}{\|e\|_H^2}e, u\rangle$ pour tout $u \in H$, d'où l'existence. Quant à l'unicité, si $f_1$ et $f_2 \in H$ sont deux représentants de $L$, alors $\langle f_1 - f_2, u\rangle = 0$ pour tout $u \in H$, en particulier le choix de $u = f_1 - f_2$ donne $\|f_1 - f_2\|_H^2 = 0$ soit $f_1 = f_2$. □

Le résultat qui suit est une généralisation du théorème de Riesz dans le cas d'une forme bilinéaire qui n'est pas forcément symétrique. Il sera essentiel pour établir le caractère bien posé de formulations variationnelles dans les espaces de Sobolev.

**Théorème 4.2.4 (Lax-Milgram).** *Soit* $(H, \langle\cdot\rangle)$ *un espace de Hilbert,* $L \in H'$ *et* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire*

– *continue : il existe* $M > 0$ *telle que* $|a(u, v)| \leq M\|u\|_H \|v\|_H$*, pour tout* $u$*,* $v \in H$ *;*
– *coercive : il existe* $\alpha > 0$ *telle que* $a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2$*, pour tout* $u \in H$*.*

*Alors, il existe un unique* $u \in H$ *tel que*

$$a(u, v) = L(v), \qquad \textit{pour tout } v \in H, \tag{4.2.4}$$

*et*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{H'}.$$

*Démonstration.* Fixons $u \in H$ et définissons $L_u : H \to \mathbb{R}$ par $L_u(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in H$. La bilinéarité de $a$ montre que $L_u$ est linéaire, et la continuité de $a$ implique que $|L_u(v)| \leq M\|u\|_H \|v\|_H$ pour tout $v \in H$. On en déduit que $L_u \in H'$ avec $\|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H$ et le théorème de Riesz assure l'existence et l'unicité d'un élement $Au \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$L_u(v) = \langle Au, v\rangle = a(u, v), \quad \|Au\|_H = \|L_u\|_{H'}.$$

De même, une nouvelle application du théorème de Riesz montre l'existence et l'unicité d'un $f \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$L(v) = \langle f, v\rangle, \quad \|f\|_H = \|L\|_{H'}.$$

On est donc ramener à démontrer l'existence et l'unicité d'un $u \in H$ tel que

$$Au = f. \tag{4.2.5}$$

Tout d'abord, l'application $A : H \to H$ est linéaire, et comme $\|Au\|_H = \|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H$, alors $A \in \mathcal{L}(H, H)$. Par ailleurs la coercivité de $a$ implique que $A$ est injective car si $Au = 0$, alors $0 = \langle Au, u\rangle = a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2$ ce qui implique que $u = 0$. Pour montrer la surjectivité, on établit d'abord que Im$A$ est fermé dans $H$. Pour ce faire, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Im$A$ telle que $v_n \to v$ dans $H$. Comme $v_n = Au_n$ pour un certain $u_n \in H$, on en déduit par coercivité de $a$ que pour tout $m$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha\|u_n - u_m\|_H^2 \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \langle Au_m - Au_n, u_m - u_m, \rangle \leq \|Au_m - Au_n\|_H \|u_m - u_n\|_H,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il s'ensuit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H$, ce qui assure l'existence d'un $u \in H$ tel que $u_n \to u$. Par continuité de $A$, il vient $v = Au$ ce qui montre que Im$A$ est un sous espace vectoriel fermé de $H$. D'après la proposition 4.2.2, on peut donc décomposer $H = \mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Im}A^\perp$ et $A$ sera sujective dès lors que $\mathrm{Im}A^\perp = \{0\}$. Or $u \in \mathrm{Im}A^\perp$ si et seulement si $\langle u, Av\rangle = 0$ pour tout $v \in H$. En particulier, le choix $v = u$ montre que $\alpha\|u\|_H^2 \leq a(u, u) = \langle u, Au\rangle = 0$, soit $u = 0$. Ceci établit la bijectivité de l'opérateur $A : H \to H$ et donc l'existence et l'unicité d'un $u$ satisfaisant (4.2.5). En effectuant le produit scalaire avec $u$, on obtient

$$\alpha\|u\|_H^2 \leq a(u, u) = \langle Au, u\rangle = \langle f, u\rangle = L(u) \leq \|L\|_{H'}\|u\|_H,$$

ce qui montre l'estimation. □

**Remarque 4.2.5.** Si la forme bilinéaire $a$ est de plus supposée symétrique, alors $a(\cdot, \cdot)$ définit sur $H$ un nouveau produit scalaire équivalent à $\langle\cdot, \cdot\rangle$, et la conclusion du théorème de Lax-Milgram résulte d'une application directe du théorème de Riesz.

Dans le cas où $a$ est de plus symétrique, le résultat suivant établit une caractérisation variationnelle de la solution de (4.2.4).

**Proposition 4.2.6.** *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgam, si l'on suppose de plus que $a$ est symétrique, alors l'unique solution du problème (4.2.4) est aussi solution de*

$$\inf_{v\in H} J(v), \qquad \textit{avec} \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

*Démonstration.* Soit $u \in H$, on écrit, pour tout $w \in H$

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) + a(u,w) - L(w). \tag{4.2.6}$$

Si $u$ est l'unique solution de (4.2.4), alors $a(u,w) = L(w)$ pour tout $w \in H$ et donc $J(u+w) > J(u)$ si $w \neq 0$. Réciproquement, si $J(u+w) \geq J(u)$ pour tout $w \in H$, on prend $w = tv$ avec $t > 0$ dans (4.2.6), puis on fait tendre $t \to 0^+$, il vient alors $a(u,v) - L(v) \geq 0$, puis $a(u,v) - L(v) = 0$ en changeant $v$ en $-v$. □

## 4.3 Applications aux espaces de Lebesgue

### 4.3.1 Le cas $L^2$

En tant qu'espace de Hilbert, le théorème de Riesz (théorème 4.2.3) permet d'identifier le dual de $L^2$ avec lui même.

**Théorème 4.3.1.** *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable. Pour tout $L \in [L^2(E)]'$, il existe un unique $f \in L^2(E)$ tel que pour tout $g \in L^2(E)$,*

$$L(g) = \int_E fg\,dx, \qquad \|L\|_{[L^2(E)]'} = \|f\|_2.$$

**Remarque 4.3.2.** Notons que la conclusion du théorème 4.3.1 reste vraie si la mesure de Lebesgue est remplacée par n'importe quelle autre mesure.

### 4.3.2 Le cas $L^p$, $1 \leq p < \infty$

Le cas général est plus compliqué. Il repose sur le théorème de Radon-Nikodým lui même conséquence du théorème 4.3.1. Nous donnons ici une version loin d'être optimale, mais toutefois suffisante pour la suite.

**Théorème 4.3.3 (Radon-Nikodým).** *Soit $\mu$ et $\nu$ deux mesures de Borel finies sur $\mathbb{R}$ telles que $\mu$ est absolument continue par rapport à $\nu$ : si $E \subset \mathbb{R}$ est un Borélien tel que $\nu(E) = 0$, alors $\mu(E) = 0$. Alors, il existe une fonction Borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (unique modulo la relation d'équivalence d'être égal $\nu$-presque partout) telle que $f \in L^1(\mathbb{R},\nu)$ et*

$$\mu(E) = \int_E f\,d\nu, \qquad \textit{pour tout Borélien } E \subset \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* **Etape 1 :** On suppose ici que $\mu \leq \nu$. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction Borélienne, d'après le théorème 3.3.1 de densité des fonctions étagées et la remarque 3.3.2, il existe une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives étagées telles que $u_n \to u$ simplement dans $\mathbb{R}$. Comme $u_n$ est étagée, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, donc

$$\int_{\mathbb{R}} u_n\,d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} u_n\,d\nu,$$

puis, par convergence monotone, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} u\, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} u\, d\nu.$$

En prenant $u = |f|^2$ avec $f \in L^2(\mathbb{R}, \nu)$, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\mu \leq= \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\nu.$$

Ensuite, $\mu$ étant une mesure finie, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ montre que

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\mu \leq \sqrt{\mu(\mathbb{R})} \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\nu \right)^{1/2},$$

de sorte que $L^2(\mathbb{R}, \nu) \subset L^1(\mathbb{R}, \mu)$. Ceci montre alors que l'application $\Phi : L^2(\mathbb{R}, \nu) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu,$$

est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}, \nu)$. Le théorème 4.3.1 (qui reste vrai pour n'importe quelle mesure autre que la mesure de Lebesgue) nous donne alors l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \nu)$ telle que

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} fg\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu.$$

Comme la mesure $\nu$ est finie, pour tout Borélien $E \subset \mathbb{R}$, on a que $\chi_E \in L^2(\mathbb{R}, \nu)$ et donc

$$\mu(E) = \int_E f\, d\nu,$$

ce qui est l'égalité demandée. Montrons de plus que $f(x) \in [0, 1]$ pour $\nu$-presque tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mu(\{f \leq -1/n\}) = \int_{\{f \leq -1/n\}} f\, d\nu \leq -\frac{1}{n} \nu(\{f \leq -1/n\}) \leq 0,$$

ce qui montre que $\nu(\{f \leq -1/n\}) = \mu(\{f \leq -1/n\}) = 0$. Comme $\{f < 0\} = \bigcup_n \{f \leq -1/n\}$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f < 0\}) = 0$. De même

$$\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) \geq \mu(\{f \geq 1 + 1/n\}) = \int_{\{f \geq 1+1/n\}} f\, d\nu \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \nu(\{f \geq 1 + 1/n\}),$$

ce qui montre que $\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) = 0$. Comme $\{f > 1\} = \bigcup_n (\{f \geq 1 + 1/n\})$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f > 1\}) = 0$.

**Etape 2 :** On suppose maintenant que $\mu$ est absolument continue par rapport à $\nu$. Il s'ensuit que les mesures $\mu$ et $\nu + \mu$ sont finies et $\mu \leq \mu + \nu$, de sorte qu'on peut appliquer la conclusion de l'étape 1. Il existe donc une fonction Borélienne $f \in L^1(\mathbb{R}, \nu + \mu)$ telle que $f(x) \in [0, 1]$ pour $(\nu + \mu)$-presque tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\mu(E) = \int_E f\, d\nu + \int_E f\, d\mu,$$

pour tout Borélien $E \subset \mathbb{R}$, soit
$$\int_E f\, d\nu = \int_E (1-f)\, d\mu. \tag{4.3.1}$$
Comme $\nu \leq \nu + \mu$ et $\mu \leq \nu + \mu$, alors $f$ prend ses valeurs dans $[0,1]$ $\nu$-p.p. et $\mu$-p.p. Par approximation (voir la proposition 3.3.1) et convergence monotone, on obtient également que
$$\int_{\mathbb{R}} fg\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} (1-f)g\, d\mu \tag{4.3.2}$$
pour toute fonction Borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. En notant $Z := \{f = 1\}$, on a d'après (4.3.1) que $\mu(Z) = \nu(Z) + \mu(Z)$ ce qui montre que $\nu(Z) = 0$ et donc que $\mu(Z) = 0$. Définissons alors $\bar{f} = \frac{f}{1-f}\chi_{Z^c}$ qui est Borélienne et positive, il vient donc en prenant $g = \frac{\chi_{Z^c}}{1-f}$ dans (4.3.2)
$$\mu(E) = \mu(E \setminus Z) = \int_E (1-f)\frac{\chi_{Z^c}}{1-f}\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \bar{f}\, d\nu.$$
Le fait que $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R}, \nu)$ vient du fait que $\mu$ est une mesure finie. $\square$

Nous aurons également besoin de décomposer n'importe quelle forme linéaire continue sur $L^p$ comme la dfférence entre deux formes linéaires continues positives.

**Lemme 4.3.4.** *Soit $1 \leq p < \infty$ et $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable. Pour tout $L \in [L^p(E)]'$, il existe des formes linéaires continue positives $L^+$ et $L^-$ sur $L^p(E)$ telles que*
$$L(u) = L^+(u) - L^-(u) \qquad \textit{pour tout } u \in L^p(E).$$

*Démonstration.* Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{u \in L^p(E) : u \geq 0 \text{ p.p. sur } E\}$ et pour tout $u \in \mathcal{C}^+$,
$$L^+(u) := \sup\{L(v) : v \in \mathcal{C}^+,\, v \leq u\}.$$

**Etape 1 :** *$L^+$ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $u \in \mathcal{C}^+$. Comme $0 \in \mathcal{C}^+$, $L^+(u) \geq 0$. Soit maintenant $v \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq v \leq u$. Par continité de $L$, on a $L(v) \leq \|L\|_{[L^p(E)]'}\|v\|_p \leq \|L\|_{[L^p(E)]'}\|u\|_p$, et par passage au sup en $v$, on obtient que $0 \leq L^+(u) \leq \|L\|_{[L^p(E)]'}\|u\|_p < \infty$.

**Etape 2 :** *$L^+$ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient $u_1$ et $u_2 \in \mathcal{C}^+$ et $v \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq v \leq u_1 + u_2$. On décompose $v$ comme $v = \min(u_1, v) + \max(v - u_1, 0)$, où $\min(u_1, v) \leq u_1$ et $\max(v-u_1, 0) \leq u_2$. Comme $\min(u_1, v)$ et $\max(v - u_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors
$$L(v) = L(\min(u_1, v)) + L(\max(v - u_1, 0)) \leq L^+(u_1) + L^+(u_2),$$
puis par passage au sup en $v$,
$$L^+(u_1 + u_2) \leq L^+(u_1) + L^+(u_2).$$
Pour montrer l'autre inégalité, on se donne un $\varepsilon > 0$ . Par définition de $L^+$, il existe $v_1$ et $v_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq v_i \leq u_i$ et $L^+(u_i) \leq L(v_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq v_1 + v_2 \leq u_1 + u_2$, il s'ensuit que
$$L^+(u_1 + u_2) \geq L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \geq L^+(u_1) + L^+(u_2) - 2\varepsilon,$$
et le résultat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

**Etape 3 :** *Définition et additivité de $L^+$ sur $L^p(E)$.* Soit $u \in L^p(E)$. On décompose $u$ comme la différence entre sa partie positive et négative $u = u^+ - u^-$ avec $u^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors

$L^+(u) := L^+(u^+) - L^+(u^-)$. Si $u$ et $v \in L^p(E)$, alors $(u+v)^+ - (u+v)^- = u^+ - u^- + v^+ - v^-$ de sorte que $(u+v)^+ + u^- + v^- = (u+v)^- + u^+ + v^+$. D'où, par additivité de $L^+$ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((u+v)^+) + L^+(u^-) + L^+(v^-) = L^+((u+v)^-) + L^+(u^+) + L^+(v^+),$$

et donc $L^+(u+v) = L^+(u) + L^+(v)$.

**Etape 4 :** *$L^+$ est continue sur $L^p(E)$.* Soit $u \in L^p(E)$. Comme $L^+$ est positive, alors $L^+(|u| \pm u) \geq 0$, donc par additivité de $L^+$ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|u|) \geq \pm L^+(u)$, *i.e.*, $|L^+(u)| \leq L^+(|u|)$. Soient maintenant $u_1$ et $u_2 \in L^p(E)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(u_1) - L^+(u_2)| = |L^+(u_1 - u_2)| \leq L^+(|u_1 - u_2|) \leq \|L\|_{[L^p(E)]'} \|u_1 - u_2\|_p.$$

**Etape 5 :** *$L^+$ est une forme linéaire sur $L^p(E)$.* L'additivité de $L^+$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nu) = nL^+(u)$. Comme $(-u)^\pm = u^\mp$, alors $L^+(-u) = -L^+(u)$ et l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $L^+(qru) = qL^+(ru) = L^+(pu) = pL^+(u)$, d'où $L^+(ru) = rL^+(u)$. La continuité de $L^+$ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique que $L^+(\alpha u) = \alpha L^+(u)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Etape 6 :** *$L^-$ est une forme linéaire continue positive sur $L^p(E)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors $L^-$ est clairement une forme linéaire continue sur $L^p(E)$. De plus, par définition de $L^+$, $L^+(u) \geq L(u)$ pour tout $u \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que $L^-$ est également positive. □

Venons en maintenant à la caractérisation du dual de $L^p$.

**Théorème 4.3.5.** *Soit $1 \leq p < \infty$ et $E \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble mesurable. Alors, pour tout $L \in [L^p(E)]'$, il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(E)$ (avec $1/p + 1/p' = 1$) telle que*

$$L(g) = \int_E fg\,dx, \qquad \textit{pour tout } g \in L^p(E)$$

*et*

$$\|L\|_{[L^p(E)]'} = \|f\|_{L^{p'}(E)}.$$

*Par conséquent, le dual de $L^p(E)$ est isométriquement isomorphe à $L^{p'}(E)$.*

*Démonstration.* **Etape 1 :** Supposons tout d'abord que $L$ et une forme linéaire continue positive. Soit $n \in \mathbb{Z}$, pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\nu_n(A) = \lambda(A \cap E \cap [n, n+1[), \quad \mu_n(A) := L(\chi_{A \cap E \cap [n,n+1[}).$$

Alors $\nu_n$ est une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}$. Quant à $\mu_n$, on a clairement que $\mu_n(\emptyset) = L(0) = 0$. Par ailleurs, si $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de Boréliens deux à deux disjoints, alors

$$\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \lim_{k\to+\infty} \chi_{\bigcup_{j=0}^k A_j} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^k \chi_{A_j} \quad \lambda\text{-p.p. dans } \mathbb{R}$$

et

$$\sum_{j=0}^k \chi_{A_j \cap E \cap [n,n+1[} \leq \chi_{E\cap[n,n+1[} \in L^p(E).$$

Le théorème de la convergence dominée montre alors que $\sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap E\cap[n,n+1[} \to \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap E\cap[n,n+1[}$ dans $L^p(E)$. Donc, par continuité et linéarité de $L$,

$$\begin{aligned}\mu_n\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &= L\left(\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap E\cap[n,n+1[}\right)\\ &= \lim_{k\to+\infty} L\left(\sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap E\cap[n,n+1[}\right) = \lim_{k\to+\infty}\sum_{j=0}^k L\left(\chi_{A_j\cap E\cap[n,n+1[}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\mu_n(A_j),\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mu_n$ est également une mesure Borélienne. De plus comme

$$\mu_n(A) = L(\chi_{A\cap E\cap[n,n+1[}) \leq \|L\|_{[L^p(E)]'}\lambda(A\cap E\cap[n,n+1[)^{1/p} = \|L\|_{[L^p(E)]'}\nu_n(A)^{1/p}$$

pour tout Borélien $A\subset\mathbb{R}$, on constate d'une part que $\mu_n$ est absolument continue par rapport à $\nu_n$, et d'autre part que $\mu_n$ est une mesure finie. Le théorème de Radon-Nikodým montre alors l'existence d'une fonction Borélienne $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ telle que $f_n\in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\mu_n(A) = \int_A f_n\,d\nu_n = \int_{A\cap E\cap[n,n+1[} f_n\,dx$$

pour tout Borélien $A\subset\mathbb{R}$. Par linéarité de $L$, on en déduit que si $g$ est une fonction étagée positive,

$$L(g\chi_{[n,n+1[}) = \int_{E\cap[n,n+1[} f_n g\,dx,$$

puis par approximation (voir la proposition 3.3.1) et convergence monotone, l'égalité précédente reste vraie pour toute fonction positive $g\in L^p(E)$. En posant $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\chi_{[n,n+1[}$, une nouvelle application du théorème de la convergence monotone montre que $\sum_{n=-k}^k g\chi_{[n,n+1[} \to g$ dans $L^p(E)$, et donc par linéarité et continuité de $L$,

$$L(g) = L\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} g\chi_{[n,n+1[}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{E\cap[n,n+1[} f_n g\,dx = \int_E fg\,dx.$$

Enfin, si $g\in L^p(E)$ est de signe quelconque, l'égalité précédente reste vraie en décomposant $g$ comme la différence entre sa partie positive et négative, et en utilisant la linéarité de $L$. D'après l'inégalité de Hölder, on a $L(g)\leq\|f\|_{p'}\|g\|_p$ pour tout $g\in L^p(E)$, ce qui montre que

$$\|L\|_{[L^p(E)]'} \leq \|f\|_{p'}.$$

Pour montrer l'inégalité opposée, et par là même le fait que $f\in L^{p'}(E)$, on distingue deux cas. Si $p=1$, alors pour tout Borélien $A\subset\mathbb{R}$,

$$\int_{A\cap E} f\,dx \leq \|L\|_{[L^1(E)]'}\lambda(A\cap E).$$

En choisissant $A=\{f\geq\|L\|_{[L^1(E)]'}+\varepsilon\}$ où $\varepsilon>0$, on obtient que $\lambda(A)=0$, ce qui montre que $\|f\|_\infty\leq\|L\|_{[L^1(E)]'}+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$, soit $f\in L^\infty(E)$ et

$$\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(E)]'}.$$

Si en revanche $1 < p < \infty$, on pose $g_{n,k} = f^{p'-1}\chi_{\{f\leq n\}\cap[-k,k]}$. Vérifions que $g_{n,k} \in L^p(E)$ :

$$\int_E |g_{n,k}|^p\,dx = \int_{\{f\leq n\}\cap[-k,k]} |f|^{(p'-1)p}\,dx = \int_{\{f\leq n\}\cap[-k,k]} |f|^{p'}\,dx \leq n^{p'}(2k) < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}L(g_{n,k}) = \int_{\{f\leq n\}\cap[-k,k]} |f|^{p'}\,dx &\leq \|L\|_{[L^p(E)]'}\|g_{n,k}\|_{L^p(E)}\\ &= \|L\|_{[L^p(E)]'}\left(\int_{\{f\leq n\}\cap[-k,k]} |f|^{p'}\,dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\left(\int_{\{f\leq n\}\cap[-k,k]} |f|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \leq \|L\|_{[L^p(E)]'}.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ puis $k \to +\infty$ et par application du théorème de convergence monotone, il vient

$$\|f\|_{L^{p'}(E)} \leq \|L\|_{[L^p(E)]'}.$$

**Etape 2 :** D'après le lemme 4.3.4, on peut écrire que $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues et positives sur $L^p(E)$. En appliquant l'étape 1, on obtient des fonctions $f^\pm : E \to \mathbb{R}^+$ tells que $f^\pm \in L^{p'}(E)$ et

$$L^\pm(g) = \int_E f^\pm g\,dx, \qquad \text{pour tout } g \in L^p(E).$$

On pose $f := f^+ - f^- \in L^{p'}(E)$ de sorte que

$$L(g) = L^+(g) - L^-(g) = \int_E f^+ g\,dx - \int_E f^- g\,dx = \int_E fg\,dx, \qquad \text{pour tout } g \in L^p(E).$$

Par l'inégalité de Hölder, on a que

$$\|L\|_{[L^p(E)]'} \leq \|f\|_{p'}.$$

Pour montrer l'inégalité opposée, on procède de même que dans l'étape. Si $p = 1$, alors pour tout Borélien $A \subset E$, on choisit $g := \frac{f}{|f|}\chi_{A\cap\{f\neq 0\}} \in L^\infty(E)$ de sorte que

$$\int_A |f|\,dx = \int_E fg\,dx = L(g) \leq |L\|_{[L^1(E)]'}\|g\|_1 = |L\|_{[L^1(E)]'}\lambda(A)$$

En choisissant $A = \{|f| \geq \|L\|_{[L^1(E)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\lambda(A) = 0$, ce qui montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(E)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(E)$ et

$$\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(E)]'}.$$

Si $1 < p < \infty$, on prend $g = f|f|^{p'-2}\chi_{\{f\neq 0\}}$. Notons que $g \in L^p(E)$ car

$$\int_E |g|^p\,dx = \int_E |f|^{(p'-1)p}\,dx = \int_E |f|^{p'}\,dx < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$L(g) = \int_E |f|^{p'}\,dx \leq \|L\|_{[L^p(E)]'}\|g\|_{L^p(E)} = \|L\|_{[L^p(E)]'}\left(\int_E |f|^{p'}\,dx\right)^{1/p}$$

ce qui implique que

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(E)]'},$$

et conclut la preuve du théorème. □

**Remarque 4.3.6.** Le théorème 4.3.5 ne couvre pas le cas $p = \infty$. En particulier, $L^1(E)$ est un sous-espace strict du dual de $L^\infty(E)$.

# Chapitre 5

# Théorèmes de Hahn-Banach et applications

## 5.1 Forme analytique

Le théorème de Hahn-Banach, sous sa forme analytique, concerne le prolongement d'une forme linéaire.

**Théorème 5.1.1 (Hahn-Banach, forme analytique).** *Soient $E$ un espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application*

*i) positivement homogène de degré 1 : $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $x \in E$ ;*

*ii) sous-additive : $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x$, $y \in E$.*

*Soient, d'autre part, $G$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire majorée par $p$ :*

$$g(x) \leq p(x), \qquad \text{pour tout } x \in G.$$

*Alors, il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge $g$ :*

$$f(x) = g(x) \qquad \text{pour tout } x \in G$$

*et majorée par $p$*

$$f(x) \leq p(x), \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

*Démonstration.* Nous présentons pour simplifier une démonstration dans le cas où *$E$ est un espace vectoriel topologique séparable et $p$ est continue.* Dans sa version générale, la démonstration de ce résultat repose sur des arguments subtils de théorie des ensembles (en particulier l'axiome du choix et le Lemme de Zorn).

**Etape 1.** Soient $W$ un sous-espace vectoriel de $E$ tel que $W \neq E$ et $h : W \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in W$. Montrons que pour tout $x_0 \notin W$, il existe une forme linéaire $\tilde{h}$ sur $\tilde{W} := W + \mathbb{R}x_0$ telle que

$$\tilde{h}(x) = h(x) \qquad \text{pour tout } x \in W$$

et

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \qquad \text{pour tout } x \in \tilde{W}.$$

On définit $\tilde{h}(x + tx_0) = h(x) + \alpha t$ pour tout $x \in W$ et $t \in \mathbb{R}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée ultérieurement. Par définition, $\tilde{h}$ est une forme linéaire sur $\tilde{W}$ et $\tilde{h}(x) = h(x)$ si $x \in W$.

Montrons maintenant que, pour un choix opportun de $\alpha$, on a $\tilde{h}(x+tx_0) \leq p(x+tx_0)$ pour tout $x \in W$ et $t \in \mathbb{R}$. D'après l'hypothèse d'homogénéité de $p$ et la linéarité de $\tilde{h}$, il suffit de vérifier que cette inégalité est satisfaite pour $t = \pm 1$. Or d'après la linéarité de $h$ et la sous-additivité de $p$, on a pour tout $x$, $y \in W$,

$$h(x) + h(y) = h(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x+x_0) + p(y-x_0),$$

ce qui montre que

$$p(x+x_0) - h(x) \geq h(y) - p(y-x_0), \quad \text{pour tout } x, y \in W.$$

Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\inf_{x \in W} \{p(x+x_0) - h(x)\} \geq \alpha \geq \sup_{y \in W} \{h(y) - p(y-x_0)\},$$

il vient alors que pour tout $x \in W$,

$$\tilde{h}(x+x_0) = h(x) + \alpha \leq p(x+x_0) \text{ et } \tilde{h}(x-x_0) = h(x) - \alpha \leq p(x-x_0),$$

ce qui montre bien l'inégalité annoncée.

**Etape 2.** Soit $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite dénombrable dense dans $E$. On pose $G_0 = G$ et, pour tout $n \geq 1$, $G_n := G_{n-1} + \mathbb{R}a_n$. Grâce à l'étape 1 et une récurrence, on montre que, pour tout $n \geq 1$, il existe une application linéaire $g_n : G_n \to \mathbb{R}$ telle que

$$g_n(x) = g_{n-1}(x) \quad \text{pour tout } x \in G_{n-1}$$

et

$$g_n(x) \leq p(x), \quad \text{pour tout } x \in G_n.$$

En particulier, $g_n = g$ sur $G$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in Y := \bigcup_{n\geq 1} G_n$, il existe un $n(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in G_n$ pour tout $n \geq n(x)$. On pose alors pour tout $x \in Y$,,

$$\tilde{g}(x) := g_n(x), \quad n \geq n(x)$$

et on vérifie que $\tilde{g}$ est linéaire, $\tilde{g} = g$ sur $G$ et $\tilde{g} \leq p$ sur $Y$.

**Etape 3.** Par densité de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dans $E$, on a que $\overline{Y} = E$. Soit $x \in E$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $Y$ telle que $x_n \to x$. Par conséquent, pour tout $n$, $m \in \mathbb{N}$, on a que

$$\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(x_m) = \tilde{g}(x_n - x_m) \leq p(x_n - x_m)$$

et

$$\tilde{g}(x_m) - \tilde{g}(x_n) = -\tilde{g}(x_n - x_m) \geq -p(x_m - x_n),$$

ce qui montre que la suite numérique $(\tilde{g}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un élément $f(x) \in \mathbb{R}$. Notons que la limite ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de $Y$ qui converge vers $x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-p(y_n - x_n) \leq \tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(y_n)| \leq p(x_n - y_n).$$

On définit ainsi une application $f : E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire. Comme $f = \tilde{g}$ sur $Y$ et $\tilde{g} = g$ sur $G$, on obtient que $f = g$ sur $G$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $Y$ telle que $x_n \to x$, alors comme $\tilde{g} \leq p$ sur $Y$, on a

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{g}(x_n) \leq \lim_{n\to+\infty} p(x_n) = p(x),$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Le théorème de Hahn-Banach permet de montrer que toute forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel normé peut ête prolongé à tout l'espace sans augmenter la norme.

**Corollaire 5.1.2.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $G$ un sous-espace vectoriel de $E$. Soit $g \in G'$ de norme*

$$\|g\|_{G'} := \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} \langle g, x\rangle.$$

*Alors, il existe $f \in E'$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in G$ et*

$$\|f\|_{E'} := \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \langle f, x\rangle = \|g\|_{G'}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach avec $p(x) := \|g\|_{G'}\|x\|$ pour tout $x \in E$. On obtient alors une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge $g$ et telle que

$$\langle f, x\rangle \ \leq \|g\|_{G'}\|x\|, \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Par conséquent, $f \in E'$ et $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$. L'autre inégalité est évidente puisque

$$\|f\|_{E'} \ = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \langle f, x\rangle \geq \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} \langle f, x\rangle = \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} \langle g, x\rangle = \|g\|_{G'},$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

Le corollaire suivant permet de calculer la norme d'un élément d'un espace vectoriel normé par dualité.

**Corollaire 5.1.3.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $x \in E$,*

$$\|x\| = \max_{f\in E', \|f\|_{E'} \ \leq 1} \langle f, x\rangle. \tag{5.1.1}$$

*Démonstration.* Par définition de la norme dans $E'$, on a que pour tout $f \in E'$ et tout $x \in E$, $\langle f, x\rangle \leq \|f\|_{E'} \ \|x\|$ et donc par passage au sup

$$\|x\| \geq \sup_{f\in E', \|f\|_{E'} \ \leq 1} \langle f, x\rangle.$$

Pour montrer l'égalité, on applique le corollaire 5.1.2 avec $G = \mathbb{R}x$ et $g(tx) = t\|x\|^2$, en observant que $\|g\|_{G'} = \|x\|$. On trouve alors un $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x\|$ et $f(x) = g(x) = \|x\|^2 = \|f\|_{E'}\|x\|$. □

**Remarque 5.1.4.** Notons que si $E = F'$ est le dual d'un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$, on a par définition de la norme d'une application linéaire

$$\|f\|_{F'} = \sup_{x\in F, \|x\|_F\leq 1} \langle f, x\rangle \quad \text{ pour tout } f \in F'.$$

En parculier, le sup n'est en général pas atteint. La formule 5.1.1 nous fournit une formule similaire dans le cas où $E$ n'est pas forcément un espace dual. Il convient toutefois de noter qu'elle est loin d'être triviale puisqu'elle résulte du théorème de Hahn-Banach, alors que dans le cas où $F'$, il s'agit d'une définition.

## 5.2 Formes géométriques

On se donne à présent un espace vectoriel normé $E$. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $H := \{x \in E : \langle f, x\rangle = \alpha\}$ est un hyperplan.

**Proposition 5.2.1.** *L'hyperplan $H$ est fermé si et seulement si $f$ est continue.*

*Démonstration.* Si $f \in E'$, alors clairement $H$ est fermé. Réciproquement, supposons que $H$ est fermé et considérons un élément $x_0 \in E \setminus H$. Le complémentaire de $H$ étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset E \setminus H$. Supposons que $\langle f, x_0\rangle < \alpha$ (le cas $\langle f, x_0\rangle > \alpha$ pouvant être traité de façon similaire) et montrons que $\langle f, x\rangle < \alpha$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Supposons par l'absurde l'existence d'un $x_1 \in \overline{B}(x_0, r)$ tel que $\langle f, x_1\rangle > \alpha$. Comme le segment

$$[x_0, x_1] = \{(1-t)x_0 + tx_1 : t \in [0,1]\} \subset \overline{B}(x_0, r),$$

on en déduit que $\langle f, (1-t)x_0 + tx_1\rangle \neq \alpha$ pour tout $t \in [0,1]$. Or le choix $t = \frac{\alpha - \langle f, x_0\rangle}{\langle f, x_1\rangle - \langle f, x_0\rangle}$ aboutit à une contradiction ce qui montre bien que $\langle f, x\rangle < \alpha$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Par conséquent, pour tout $z \in \overline{B}(0,1)$, $x_0 + rz \in \overline{B}(x_0, r)$ et donc

$$\langle f, x_0 + rz\rangle < \alpha, \quad \text{pour tout } z \in \overline{B}(0,1),$$

d'où $\|f\|_{E'} \leq \frac{1}{r}(\alpha - \langle f, x_0\rangle)$. □

**Définition 5.2.2.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.
- i) L'hyperplan $H$ sépare $A$ et $B$ si $\langle f, a\rangle \leq \alpha \leq \langle f, b\rangle$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$ ;
- ii) L'hyperplan $H$ sépare strictement $A$ et $B$ s'il existe un $\varepsilon > 0$, $\langle f, a\rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \langle f, b\rangle$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

### 5.2.1 Ensembles convexes et jauge

**Définition 5.2.3.** Soit $C$ une partie d'un espace vectoriel $E$. On dit que $C$ est convexe si pour tout $x$, $y \in C$, le segment $[x, y] := \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\}$ est inclus dans $C$.

En guise d'exemple, tout sous-espace vectoriel de $E$ est convexe. Toute boule d'un espace vectoriel normé est convexe.

**Lemme 5.2.4.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $C$ un ensemble convexe et ouvert tel que $0 \in C \subset E$. On définit la jauge de $C$ par*

$$j(x) := \inf\{\alpha > 0 : \ \alpha^{-1}x \in C\}, \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

*Alors*
- *i) $j$ est positivement homogène de degré 1 ;*
- *ii) $j$ est sous-additive ;*
- *iii) il existe $M > 0$ telle que $0 \leq j(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$ ;*
- *iv) $C = \{x \in E : j(x) < 1\}$.*

*Démonstration.* Si $x \in E$ et $\lambda \geq 0$,

$$j(\lambda x) := \inf\{\alpha > 0 : \ \alpha^{-1}\lambda x \in C\} = \lambda \inf\{\alpha/\lambda > 0 : \ (\alpha/\lambda)^{-1}x \in C\} = \lambda j(x),$$

ce qui montre i).

Pour ii), soient $x$ et $y \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors $x/(j(x)+\varepsilon) \in C$ et $y/(j(y)+\varepsilon) \in C$. Par convexité de $C$,

$$t\frac{x}{j(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{j(y)+\varepsilon} \in C, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

En choisissant $t = \frac{j(x)+\varepsilon}{j(x)+j(y)+2\varepsilon}$, il vient $\frac{x+y}{j(x)+j(y)+2\varepsilon} \in C$, soit $j(x+y) \leq j(x)+j(y)+2\varepsilon$. On obtient alors ii) par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Comme $0 \in C$ et $C$ est ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset C$. Donc pour tout $x \in E$, on a $rx/\|x\| \in \overline{B}(0,r)$ et donc $j(x) \leq \|x\|/r$, ce qui montre iii) avec $M = 1/r$.

Enfin, si $x \in C$, comme $C$ est ouvert, il existe un $r' > 0$ tel que $B(x,r') \subset C$. Soit $\varepsilon < r'/\|x\|$, alors $\|(1+\varepsilon)x - x\| = \varepsilon\|x\| < r'$ ce qui montre que $(1+\varepsilon)x \in B(x,r') \subset C$. Par conséquent, $j(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Réciproquement, si $j(x) < 1$, alors il existe un $j(x) < \alpha < 1$ tel que $x/\alpha \in C$. Comme $0 \in C$, on en déduit que $x = \alpha(x/\alpha) + (1-\alpha)0 \in C$, ce qui montre iv). $\square$

**Proposition 5.2.5.** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $C$ un ensemble convexe, ouvert et non vide. Si $x \notin C$, il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ tel que $f(y) < f(x)$ pour tout $y \in C$. En particulier, l'hyperplan $\{y \in E : f(y) = f(x)\}$ sépare $\{x\}$ et $C$.*

*Démonstration.* Par translation, on se ramène au cas $0 \in C$. On considère la forme linéaire $g$ sur $G = \mathbb{R}x$ définie par $g(tx) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $g(tx) \leq j(tx)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $j$ est la jauge de $C$. Si $t \leq 0$, l'inégalité est évidente. Si $t = 1$, alors $g(x) = 1 \leq j(x)$ car $x \notin C$ d'après le lemme 5.2.4. Enfin si $t > 0$ alors, $j(tx) = t \leq tj(x) = j(tx)$ toujours d'après le lemme 5.2.4. Le théorème de Hahn-Banach sous forme analytique (théorème 5.1.1) implique alors l'existence d'une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f(tx) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f(y) \leq j(y)$ pour tout $y \in E$. En particulier, $f(y) \leq M\|y\|$ pour tout $y \in E$ ce qui montre que $f \in E'$, et $f(y) \leq j(y) < 1 = f(x)$ pour tout $y \in C$ d'après le lemme 5.2.4. $\square$

### 5.2.2 Séparation large

**Théorème 5.2.6 (Hahn-Banach, première forme géométrique).** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A$ et $B$ deux ensembles convexes non vides disjoints de $E$. On suppose $A$ ouvert. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare $A$ et $B$.*

*Démonstration.* Soit $C = A - B = \{a - b : a \in A,\, b \in B\}$. Alors

- $C$ est ouvert car $C = \bigcup_{b \in B}(A - b)$ ;
- $C$ est convexe car si $x$, $y \in C$ et $t \in [0,1]$, on peut trouver $a_1$, $a_2 \in A$ et $b_1$, $b_2 \in B$ tels que $x = a_1 - b_1$ et $y = a_2 - b_2$. Par conséquent, $tx + (1-t)y = ta_1 + (1-t)a_2 - tb_1 - (1-t)b_2$. Par convexité de $A$ et $B$, on a que $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ et $tb_1 + (1-t)b_2 \in B$, ce qui montre que $tx + (1-t)y \in C$ ;
- $0 \notin C$ car sinon, il existerait $a \in A$ et $b \in B$ tels que $0 = a - b$, soit $a = b$, ce qui est impossible puisque $A$ et $B$ sont disjoints.

La proposition 5.2.5 montre alors l'existence d'un $f \in E' \setminus \{0\}$ tel que $f(y) < f(0) = 0$ pour tout $y \in C$. Par conséquent, $f(a) < f(b)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$. Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$, alors l'hyperplan $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ sépare effectivement $A$ et $B$. $\square$

### 5.2.3 Séparation stricte

**Théorème 5.2.7 (Hahn-Banach, seconde forme géométrique).** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A$ et $B$ deux ensembles convexes non vides disjoints de $E$. On suppose $A$ fermé et $B$ compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement $A$ et $B$.*

*Démonstration.* Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$. Les ensembles $A_\varepsilon$ et $B_\varepsilon$ sont ouverts, convexes et non vide. De plus, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$. En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $A_{\varepsilon_n} \cap B_{\varepsilon_n} \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, on pourrait trouver deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ telles que $\|a_n - b_n\| \leq 2\varepsilon_n$. L'ensemble $B$ étant compact, on peut extraire une sous-suite $(b_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $b \in B$. Par conséquent, on a aussi que $a_{\sigma(n)} \to b$ et comme $A$ est fermé, il vient que $b \in A$ ce qui est absurde puisque $A$ et $B$ sont disjoints. Le théorème 5.2.6 montre alors l'existence d'un $f_\varepsilon \in E' \setminus \{0\}$ et d'un $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_\varepsilon(a + \varepsilon x) \leq \alpha_\varepsilon \leq f_\varepsilon(b + \varepsilon x), \qquad \text{pour tout } a \in A,\ b \in B \text{ et } x \in B(0,1).$$

D'où

$$f_\varepsilon(a) + \varepsilon\|f_\varepsilon\|_{E'} \leq \alpha_\varepsilon \leq f_\varepsilon(b) - \varepsilon\|f_\varepsilon\|_{E'},$$

ce qui termine la preuve du théorème puisque $\|f_\varepsilon\|_{E'} > 0$. □

Une application directe du théorème précédent concerne un critère de densité.

**Corollaire 5.2.8.** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $\overline{F} = E$ si et seulement si*

$$f \in E' \textit{ et } \langle f, x\rangle = 0 \textit{ pour tout } x \in F \Longrightarrow f = 0.$$

*Démonstration.* Si $\overline{F} = E$ et $f \in E'$ est tel que $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in F$, alors $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Par passage au sup en $x$, il vient $\|f\|_{E'} = 0$ ce qui montre que $f = 0$.

Réciproquement, si $\overline{F} \neq E$, alors il existe un $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, seconde forme géométrique (théorème 5.2.7), on peut séparer le compact convexe $\{x_0\}$ du fermé convexe $\overline{F}$. Il existe donc un $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_0) < \alpha < f(y)$ pour tout $y \in \overline{F}$. En particulier $f(y) > \alpha$ pour tout $y \in F$, ce qui implique que $f = 0$ sur $F$ car c'est un sous-espace vectoriel. □

### 5.2.4 Applications

Les différentes versions du théorème de Hahn-Banach s'appliquent typiquement pour montrer certaines propriétés des ensembles séparables ou des espaces réflexifs.

**Proposition 5.2.9.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace Banach. Si $E'$ est séparable, alors $E$ l'est aussi.*

*Démonstration.* Soit $D := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense dans $E'$. Par définition de la norme sur $E'$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x_n \in E$ avec $\|x_n\| = 1$ et $\langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{E'}$. Notons $F$ l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels. Il s'agit d'un ensemble dénombrable. Montrons qu'il est dense dans $E$. Pour ce faire, on considère $f \in E'$ tel que $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in F$. Par densité de $D$ dans $E'$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $f_n \in D$ tel que $\|f - f_n\|_{E'} \leq \varepsilon$. Par conséquent,

$$\|f\|_{E'} \leq \varepsilon + \|f_n\|_{E'} \leq \varepsilon + 2\langle f_n, x_n\rangle = \varepsilon + 2\langle f_n - f, x_n\rangle + 2\langle f, x_n\rangle.$$

Comme $f$ s'annule sur $F$ et que $f_n \in F$, il vient

$$\|f\|_{E'} \leq \varepsilon + 2\|f_n - f\|_{E'}\|x_n\| \leq 3\varepsilon,$$

ce qui montre que $f = 0$. Le Corollaire 5.2.8 permet donc de conclure que $F$ est dense dans $E$ et donc que $E$ est séprable. □

L'espace $E$ s'identifie naturellement à une partie de $E''$ via l'application $J : E \to E''$ définie par

$$\langle J(x), L\rangle_{E'',E'} = \langle L, x\rangle_{E',E}, \qquad \text{pour tout} \quad x \in E.$$

**Proposition 5.2.10.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Alors $J$ réalise une isométrie de $E$ sur son image $J(E) \subset E''$, i.e. $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|$ pour tout $x \in E$. En particulier, $J$ est injective et $J(E)$ est fermé dans $E''$.*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que $J$ est un application linéaire. Par définition de la norme et de $J$,

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{L\in E', \|L\|_{E'} \leq 1} |\langle J(x), L\rangle_{E'',E'}| = \sup_{L\in E', \|L\|_{E'} \leq 1} |\langle L, x\rangle_{E',E}| = \|x\|,$$

où la dernière égalité résulte du corollaire 5.1.3. Ceci montre que $J$ est une isométrie et donc qu'elle est injective. Montrons à présent que sont image $J(E)$ est fermée dans $E''$. Pour ce faire, on considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $J(E)$ qui converge dans $E''$ vers un élément $T \in E''$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x_n \in E$ tel que $T_n = J(x_n)$ et $J$ étant une isométrie, on a que $\|x_n - x_m\| = \|J(x_n) - J(x_m)\|_{E''} = \|T_n - T_m\|_{E''}$ pour tout $m$, $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $E$ qui converge donc vers un élément $x \in E$. Par continuité de $J$, il vient que $T = J(x)$, ce qui montre que $J(E)$ est fermé dans $E''$. □

**Définition 5.2.11.** Un espace de Banach $E$ est réflexif si l'application $J$ est une bijection, *i.e.*, $J(E) = E''$.

Lorsque $E$ est réflexif, on identifie implicitement $E$ et $E''$ via l'isomorphisme $J$. Par exemple, tout espace de Hilbert $H$ est réflexif puisque, par le théorème de Riesz $H$ s'identifie à son dual. Par ailleurs, les espaces $L^p(E)$ sont réflexfis pour $1 < p < \infty$. En revanche ni $L^1(E)$ ni $L^\infty(E)$ ne le sont.

**Lemme 5.2.12.** *Si $E$ est réflexif, alors $E'$ l'est aussi.*

*Démonstration.* Notons d'abord que la proposition 5.2.10 appliquée à l'espace de Banach réflexif $E'$ montre que $\tilde{J} : E' \to (E')''$, définie par $\langle \tilde{J}(L), T\rangle_{(E'')',E''} = \langle T, L\rangle_{E'',E'}$ pour tout $L \in E'$ et $T \in E''$, est injective et isométrique à image fermée dans $(E')''$. Montrons maintenant qu'elle est sujective. Soit $R \in (E')'' = (E'')'$ une forme linéaire continue sur $E''$, on pose $L := R \circ J \in E'$. Pour tout $T \in E''$, par réflexibilité de $E$, il existe un $x \in E$ tel que $T = J(x)$. Par conséquent,

$$\langle R, T\rangle_{(E'')',E''} = \langle R, J(x)\rangle_{(E'')',E''} = \langle L, x\rangle_{E',E} = \langle J(x), L\rangle_{E'',E'} = \langle T, L\rangle_{E'',E'},$$

ce qui montre que l'application $\tilde{J}$ est surjective. Ceci prouve que $(E')''$ est isométriquement isomorphe à $E'$, et donc que $E'$ est réflexif. □

**Proposition 5.2.13.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif et $F$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors $F$ est également réflexif.*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que $F''$ est isométriquement isomorphe à une partie de $E''$ par l'application $I : F'' \to E''$ définie par

$$\langle I(T), L\rangle_{E'',E'} = \langle T, L|_F\rangle_{F'',F'}, \qquad \text{pour tout } T \in F'' \text{ et } L \in E'.$$

Par définition, $I$ est linéaire et

$$|\langle I(T), L\rangle_{E'',E}| \leq \|T\|_{F''}\|L|_F\|_{F'} \leq \|T\|_{F''}\|L\|_{E'},$$

ce qui montre que $I$ est continue de norme $\|I\|_{\mathcal{L}(F'',E'')} \leq 1$. Pour montrer l'inégalité opposée, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\tilde{L} \in F'$ tel que

$$\frac{\langle T, \tilde{L}\rangle_{F'',F'}}{\|\tilde{L}\|_{F'}} + \varepsilon \geq \|T\|_{F''}.$$

D'après le corollaire 5.1.2, il existe une extension $L \in E'$ telle que $L|_F = \tilde{L}$ et $\|L\|_{E'} = \|\tilde{L}\|_{F'}$. Par conséquent,

$$\frac{\langle I(T), L\rangle_{E'',E'}}{\|L\|_{E'}} = \frac{\langle T, \tilde{L}\rangle_{F'',F'}}{\|\tilde{L}\|_{F'}} \geq \|T\|_{F''} - \varepsilon,$$

ce qui montre que $\|I(T)\|_{E''} \geq \|T\|_{F''}$ et donc $\|I\|_{\mathcal{L}(F'',E'')} \geq 1$. Par conséquent, $I$ réalise une isométrie de $F''$ sur sont image $I(F'') \subset E''$ ce qui prouve que $F''$ et $I(F'')$ sont isométriquement isomorphes.

Il s'agit à présent de montrer que pour tout $T \in F''$, il existe un $v \in F$ tel que

$$\langle T, \mathcal{L}\rangle_{F'',F'} = \langle \mathcal{L}, v\rangle_{F',F}, \quad \text{pour tout } \mathcal{L} \in F'. \tag{5.2.1}$$

D'après ce qui vient d'être fait, il existe un $I(T) \in E''$ tel que $\langle I(T), L\rangle_{E'',E'} = \langle T, L|_F\rangle_{F'',F'}$ pour tout $L \in E'$. Or $E$ étant réflexif, il existe un $v \in E$ tel que $\langle L, v\rangle_{E',E} = \langle I(T), L\rangle_{E'',E'}$ et par conséquent

$$\langle T, L|_F\rangle_{F'',F'} = \langle L, v\rangle_{E',E}. \tag{5.2.2}$$

Montrons à présent que $v \in F$. Pour ce faire, supposons par l'absurde que $v \notin F$. Le théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géoémétrique (théorème 5.2.7) permet de séparer strictement le compact $\{v\}$ du fermé convexe $F$. Il existe donc $L_0 \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle L_0, v\rangle_{E',E} < \alpha < \langle L_0, w\rangle_{E',E}, \quad \text{pour tout } w \in F.$$

Il vient alors que $L_0$ est minorée sur le sous-espace vectoriel $F$, et donc $L_0 = 0$ sur $F$, puis que $\langle L_0, v\rangle_{E',E} < \alpha < 0$ ce qui est absurde d'après (5.2.2). Enfin si $\mathcal{L} \in F'$, le corollaire 5.1.2 permet de prolonger $\mathcal{L}$ en un élément $L \in E'$ avec $L|_F = \mathcal{L}$ de sorte que, $v$ appartenant à $F$, $\langle \mathcal{L}, v\rangle_{F',F} = \langle L, v\rangle_{E',E}$, ce qui conclut la preuve de (5.2.1). □

# Chapitre 6

# Convergence faible et faible*

Dans ce chapitre nous allons introduire une notion de convergence permettant, dans certain cas, aux ensembles bornés d'être séquentiellement relativement compacts.

## 6.1 Convergence faible

Dans cette section, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace de Banach de dual $E'$.

**Définition 6.1.1.** Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ converge faiblement vers $E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\langle f, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}, \qquad \text{pour tout } f \in E'.$$

**Remarque 6.1.2.**
- Il y a unicité de la limite faible car si $\langle f, x-y\rangle_{E',E} = 0$ pour tout $f \in E'$, par passage au sup en $f$, il vient d'après le corollaire 5.1.3 que $\|x-y\| = 0$, soit $x = y$.
- Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, d'après le théorème de Riesz (théorème 4.2.3), la convergence faible $x_n \rightharpoonup x$ dans $H$ signifie

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle, \qquad \text{pour tout } y \in H.$$

- Si $1 \leq p < \infty$ et $E \subset \mathbb{R}$ est un ensemble mesurable, d'après le théorème 4.3.5, la convergence faible $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(E)$ s'écrit

$$\int_E f_n g\, dx \to \int_E f g\, dx, \qquad \text{pour tout } g \in L^{p'}(E),$$

  où $1/p + 1/p' = 1$.

Notons que la convergence faible dans un espace de Banach nécessite l'identification de son dual. Dans $L^\infty(E)$ (dont le dual est caractérisé mais plutôt exotique), on n'utilise très peu la convergence faible. Un autre mode de convergence (la convergence faible*) sera défini plus tard et sera plus adapté à ce cas.

**Proposition 6.1.3.** *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E$ qui converge fortement vers $x$, i.e., $\|x_n - x\| \to 0$, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$.*

*Démonstration.* Si $f \in E'$, par définition de la norme dans $E'$,

$$|\langle f, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| = |\langle f, x_n - x\rangle_{E',E}| \leq \|f\|_{E'}\|x_n - x\| \to 0,$$

ce qui établit le résultat. □

Comme le montre le résultat suivant, la réciproque est en général fausse.

**Définition 6.1.4.** Soit $H$ un espace de Hilbert séparable. On dit que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $H$ si elle est

i) *orthornormée :* pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ ;
ii) *totale :* $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans $H$, *i.e.*, tout élément de $H$ est la limite d'une suite de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Notons que le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt montre que tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

**Proposition 6.1.5.** *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de $H$. Alors $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H$.*

*Démonstration.* Le fait que $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ résulte du fait que la base est orthonormée.

Notons $F_n := \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ qui est un sous espace fermé (car de dimension fini) de $E$. Par conséquent, la projection orthogonale $P_n(x)$ d'un élément $x \in H$ sur $F_n$ est bien définie. Par ailleurs, on a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

En effet, $P_n(x) \in F_n$ et pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$\langle x - P_n(x), e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle + \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

car $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ceci montre que $\langle x - P_n(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F_n$ et d'après la Proposition 4.2.2, que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Par ailleurs, le fait que la base $\{e_0, \dots, e_n\}$ est orthonormée montre que

$$\|P_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Une nouvelle application de la Proposition 4.2.2 montre que $x = P_n(x) + x - P_n(x)$ avec $P_n(x) \in F_n$ et $x - P_n(x) \in F_n^\perp$ et, d'après Pythagore, on a que

$$\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 \geq \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité de Bessel

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

La série précédente étant convergente, son terme général tend vers zéro, soit $\langle x, e_n\rangle \to 0$, ce qui montre bien que $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H$. $\square$

Le résultat précédent nous fournit un cas de suite faiblement convergente qui ne converge pas fortement. Toutefois, en dimension finie, les deux notions de convergence coïncident.

**Proposition 6.1.6.** *Soient $E$ un espace de dimension finie et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E$. Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, alors $x_n \to x$ fortement dans $E$.*

*Démonstration.* Soit $d = \dim(E)$ et $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $E$. Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on considère la norme euclidienne définie par

$$\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{d} x_i^2, \qquad \text{où } x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i.$$

On note $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ la base duale, *i.e.*, les formes linéaires coordonnées définies par $e_i^*(x) = x_i$. Comme $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, on a en particulier que $(x_n)_i = e_i^*(x_n) \to e_i^*(x) = x_i$ pour tout $i = 1, \dots, d$, et donc

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |(x_n)_i - x_i|^2 \to 0$$

car la somme est finie. $\square$

Nous nous intéressons désormais à des propriétés de bornitudes et compacité.

**Proposition 6.1.7.** *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, alors :*
*i) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E$ ;*
*ii) $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ ;*
*iii) si $f_n \to f$ fortement dans $E'$, alors $\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$.*

*Démonstration.* Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, alors pour tout $f \in E'$, $\langle f, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$ et donc la suite numérique $(\langle f, x_n\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, x_n\rangle_{E',E}| < +\infty \qquad \text{pour tout } f \in E'.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus montre alors que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x_n\rangle_{E',E}| < +\infty.$$

Or d'après le corollaire 5.1.3, on a $\sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x_n\rangle_{E',E}| = \|x_n\|$, ce qui montre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty,$$

ce qui établit i). En ce qui concerne ii), on écrit que pour tout $f \in E'$,

$$\langle f, x_n\rangle_{E',E} = \lim_{n\to+\infty} \langle f, x\rangle_{E',E} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{E'} \|x_n\|.$$

On divise ensuite par $\|f\|_{E'}$ puis on passe au sup en $f \in E'$, le corollaire 5.1.3 implique alors que

$$\|x\| = \sup_{f\in E', f\neq 0} \frac{\langle f, x_n\rangle_{E',E}}{\|f\|_{E'}} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

Enfin, si $f_n \to f$ fortement dans $E'$, alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| &\leq |\langle f_n - f, x_n\rangle_{E',E}| + |\langle f, x_n - x\rangle_{E',E} \\ &\leq \|f_n - f\|_{E'} \|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle_{E',E}|. \end{aligned}$$

D'après i), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E$ par une constante $M > 0$ (indépendante de $n$), donc

$$|\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| \leq M\|f_n - f\|_{E'} + |\langle f, x_n - x\rangle_{E',E}| \to 0,$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. $\square$

Le résultat suivant est l'un des résultats fondamentaux sur la convergence faible. Il assure, dans les espaces réflexifs, que toute suite bornée est faiblement séquentiellement relativement compacte.

**Théorème 6.1.8.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $E$, i.e.,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty,$$

*alors on peut en extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un élément $x \in E$.*

*Démonstration.* On définit $F = \overline{\mathrm{Vect}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de $E$. En vertu de la proposition 5.2.13, $F$ est réflexif. Il est également séparable puisque l'ensemble $D$ formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels est dénombrable et dense dans $F$. Comme $F''$ peut être identifié à $F$ via un isomorphisme isométrique $J : F \to F''$, on en déduit que l'ensemble $J(D)$ est dénombrable et dense dans $F''$, ce qui assure que $F''$ est séparable. Par suite, $F'$ est également séparable d'après la proposition 5.2.9.

Notons $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans $F$. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonale de sous-suite. Comme la suite numérique $(\langle f_0, x_n\rangle_{F',F})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(f_0) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_0, x_{\sigma_0(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_0).$$

Par récurrence, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $L(f_0), \dots, L(f_k) \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $0 \le j \le k$,

$$\langle f_j, x_{\sigma_j\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_j).$$

Comme la suite $(\langle f_{k+1}, x_{\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}\rangle_{F',F})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, une nouvelle application du théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(f_{k+1}) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{k+1}, x_{\sigma_{k+1}\circ\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_{k+1}).$$

On définit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\sigma(n) := \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_0(n)$ de sorte que la sous-suite diagonale $(x_{\sigma(n)})_{n\ge k}$ est une sous-suite de $(x_{\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_k).$$

Montrons à présent que, pour tout $f \in F$ et pour la sous-suite sélectionnée précedemment, il existe un $n(f) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F})_{n\ge n(f)}$ converge. Soit donc $f \in F$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $f_k$ tel que $\|f - f_k\|_{F'} \le \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $m$, $n \ge k$,

$$\begin{aligned}|\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| &\le |\langle f - f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F}| \\ &\quad + |\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| + |\langle f_k - f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \\ &\le (\|x_{\sigma(n)}\| + \|x_{\sigma(m)}\|)\|f - f_k\|_{F'} + |\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}|.\end{aligned}$$

D'après le théorème 6.1.8, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par une constante $M > 0$ et donc

$$|\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \le 2M\varepsilon + |\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}|.$$

Comme la suite $(\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy et donc il existe un $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \ge N_k$, $|\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \le \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout $m$, $n \ge \max(N_k, k)$,

$$|\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \le (2M + 1)\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F})_{n\geq k}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un réel noté $L(f)$.

On montre facilement que l'application $f \mapsto L(f)$ est linéaire et comme

$$|L(f)| = \lim_{n\to+\infty} |\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F}| \leq M\|f\|_{F'},$$

elle est continue et donc $L \in F''$. Par réflexibilité de $F''$, il existe un $x \in F$ tel que $L(f) = \langle f, x\rangle_{F',F}$. Finalement on a montré l'existence d'une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'un élément $x \in F$ tels que $\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} \to \langle f, x\rangle_{F',F}$. Ceci implique que $x_{\sigma(n)} \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$. En effet, si $f \in E$, alors comme $x \in F$ et $x_{\sigma(n)} \in F$,

$$\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{E',E} = \langle f|_F, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} \to \langle f|_F, x\rangle_{F',F} = \langle f, x\rangle_{E',E},$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

**Remarque 6.1.9.** Ce résultat s'applique en particulier aux espaces $L^p(E)$ pour tout $1 < p < \infty$. L'hypothèse de réflexibilité est essentielle car si $E = L^1([0,1])$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

alors on a $\|f_n\|_1 = 1$. Supposons, par l'absurde, que pour une sous-suite toujours notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1([0,1])$. Comme en particulier, $1 \in L^\infty([0,1])$, il vient que

$$1 = \int_0^1 f_n\, dx \to \int_0^1 f\, dx,$$

ce qui montre que $\int_0^1 f\, dx = 1$. Par ailleurs, si $I$ est un intervalle fermé contenu dans $]0,1]$, alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_n = 0$ p.p. sur $I$, pour tout $n \geq n_0$. En choisissant $g = \chi_I \in L^\infty([0,1])$ comme fonction test, il vient

$$0 = \int_I f_n\, dx \to \int_I f\, dx.$$

En choisissant $I = [1/k, 1]$, on obtient que $\int_{1/k}^1 f\, dx = 0$ pour tout $k \geq 1$, puis par passage à la limite quand $k \to +\infty$ et par convergence dominée, $\int_0^1 f\, dx = 0$, ce qui est impossible.

## 6.2 Convergence faible*

Dans un certain nombre de situations, si l'espace de départ est lui-même un dual (par exemple $L^\infty$), on a une notion encore plus faible de convergence.

**Définition 6.2.1.** Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E'$ converge faible* vers $f$ dans $E'$, et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si

$$\langle f_n, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

**Remarque 6.2.2.** Si $p = \infty$ et $E \subset \mathbb{R}$ est un ensemble mesurable, d'après le théorème 4.3.5, la convergence faible* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(E)$ s'écrit

$$\int_E f_n g\, dx \to \int_E fg\, dx, \quad \text{pour tout } g \in L^1(E).$$

On a donc à notre disposition trois modes de convergence dans $E'$ : la convergence forte, la convergence faible et la convergence faible*. Nous avons déjà vu dans la proposition 6.1.3 que la convergence forte implique la convergence faible. Nous allons voir maintenant que la convergence faible implique la convergence faible*.

**Proposition 6.2.3.** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E'$ telle que $f_n \rightharpoonup f$ faible* dans $E'$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $E'$.*

*Démonstration.* Si $x \in E$, on note $J(x) \in E''$ défini par $\langle J(x), f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}$ pour tout $f \in E'$. Par convergence faible, on a donc pour tout $x \in E$

$$\langle f_n, x\rangle_{E',E} = \langle J(x), f_n\rangle_{E'',E'} \to \langle J(x), f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E},$$

ce qui montre bien que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans $E'$. □

Toutefois, comme le montre le résultat suivant, dans le cas réflexifs, les deux notions de convergence coïncident.

**Proposition 6.2.4.** *Si $E$ est un espace réflexif, alors les convergences faible et faible* sur $E'$ coïncident.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans $E'$, alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $E'$. Soit $T \in E''$, par réflexibilité de $E$, il existe un $x \in E$ tel que $\langle T, f\rangle_{E'',E} = \langle f, x\rangle_{E',E}$ pour tout $f \in E'$. Par conséquent, par convergence faible* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\langle T, f_n\rangle_{E'',E} = \langle f_n, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E} = \langle T, f\rangle_{E'',E},$$

ce qui montre effectivement que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans $E'$. □

Tout comme pour la convergence faible, nous nous intéressons à présent aux propriétés de bornitude et compacité.

**Proposition 6.2.5.** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E'$ telle que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans $E'$, alors*
- *i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E'$ ;*
- *ii) $\|f\|_{E'} \leq \liminf_n \|f_n\|_{E'}$ ;*
- *iii) si $x_n \to x$ fortement dans $E$, alors $\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$.*

*Démonstration.* Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans $E'$, alors pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$ et donc la suite numérique $(\langle f_n, x\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, x\rangle_{E',E}| < +\infty \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus montre alors que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |\langle f_n, x\rangle_{E',E}| < +\infty.$$

Or par définition de la norme dans $E'$, on a $\sup_{x\in E,\|x\|\leq 1} |\langle f_n, x\rangle_{E',E}| = \|f_n\|_{E'}$, ce qui montre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty,$$

ce qui établit i). En ce qui concerne ii), on écrit que pour tout $x \in E$,

$$\langle f, x\rangle_{E',E} = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, x\rangle_{E',E} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'} \|x\|.$$

On divise ensuite par $\|x\|$ puis on passe au sup en $x \in E$,

$$\|f\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\langle f, x\rangle_{E',E}}{\|x\|} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}.$$

Enfin, si $x_n \to x$ fortement dans $E$, alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| &\leq |\langle f_n, x_n - x\rangle_{E',E}| + |\langle f_n - f, x\rangle_{E',E} \\ &\leq \|f_n\|_{E'}\|x_n - x\| + |\langle f_n - f, x\rangle_{E',E}|. \end{aligned}$$

D'après i), la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E'$ par une constante $M > 0$ (indépendante de $n$), donc

$$|\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| \leq M\|x_n - x\| + |\langle f_n - f, x\rangle_{E',E}| \to 0,$$

ce qui montre iii) et conclut la preuve de la proposition. □

Le résultat suivant est l'un des résultats fondamentaux sur la convergence faible*. Il assure, dans le dual d'un espace séparable, que toute suite bornée est faible* séquentiellement relativement compacte.

**Théorème 6.2.6.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $E'$, i.e.,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty,$$

*alors on peut en extraire une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faible* vers un élément $f \in E'$.*

*Démonstration.* Notons $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans $E$. Nous allons de nouveau appliquer un principe d'extraction diagonale de sous-suite. Comme la suite numérique $(\langle f_n, x_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_0) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_0(n)}, x_0\rangle \to L(x_0).$$

Par récurrence, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \ldots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $L(x_0), \ldots, L(x_k) \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $0 \leq j \leq k$,

$$\langle f_{\sigma_j\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}, x_j\rangle \to L(x_j).$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}, x_{k+1}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, une nouvelle application du théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_{k+1}) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_{k+1}\circ\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}, x_{k+1}\rangle \to L(x_{k+1}).$$

On définit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\sigma(n) := \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_0(n)$ de sorte que la sous-suite diagonale $(x_{\sigma(n)})_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(x_{\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle \to L(x_k).$$

Montrons à présent, pour tout $x \in E$ et pour la sous-suite sélectionnée précedemment, il existe un $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\geq n(x)}$ converge. Soit donc $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x_k$ tel que $\|x - x_k\| \leq \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $m$, $n \geq k$,

$$\begin{aligned} |\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| &\leq |\langle f_{\sigma(n)}, x - x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(m)}, x - x_k\rangle| \\ &\leq (\|f_{\sigma(m)}\|_{E'} + \|f_{\sigma(n)}\|_{E'})\|x - x_k\| + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|. \end{aligned}$$

D'après le théorème 6.2.6, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par une constante $M > 0$ et donc

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \leq 2M\varepsilon + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|.$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy et donc il existe un $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N_k$, $|\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| \leq \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout $m$, $n \geq \max(N_k, k)$,

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle_{F',F} - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \leq (2M + 1)\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\geq k}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un réel noté $L(x)$.

On montre enfin que l'application $x \mapsto L(x)$ est linéaire et comme

$$|L(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle| \leq M\|x\|,$$

elle est continue et donc $L \in E'$, ce qui montre que $f_{\sigma(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} L$ faible* dans $E'$. □

## 6.3 Convergence faible et applications linéaires

Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

**Lemme 6.3.1.** *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, alors $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ faiblement dans $F$.*

*Démonstration.* On note $T^* : F' \to E'$ l'adjoint de $T$ défini par

$$\langle T^*(f), x\rangle_{E',E} = \langle f, T(x)\rangle_{F',F}, \qquad \text{pour tout } f \in F' \text{ et } x \in E.$$

L'application $T^*$ est linéaire et continue de $F'$ dans $E'$. Soit $f \in F'$, alors $T^*(f) \in E'$ et

$$\langle f, T(x_n)\rangle_{F',F} = \langle T^*(f), x_n\rangle_{E',E} \to \langle T^*(f), x\rangle_{E',E} = \langle f, T(x)\rangle_{F',F},$$

ce qui montre effectivement que $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ faiblement dans $F$. □

Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que $T$ est un opérateur compact si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $E$, on peut extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(T(x_{\sigma(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $F$.

**Lemme 6.3.2.** *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, alors $T(x_n) \to T(x)$ fortement dans $F$.*

*Démonstration.* D'après le lemme 6.3.1, on sait déjà que $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ faiblement dans $F$. Il s'agit de montrer que la convergence est forte. Soit $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $x_{\sigma(n)} \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, on sait d'après la proposition 6.1.7 qu'elle est bornée. L'opérateur $T$ étant compact, on peut en extraire une nouvelle sous-suite $(x_{\varphi\circ\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $T(x_{\varphi\circ\sigma(n)}) \to f$ fortement dans $F$ et donc également faiblement par la proposition 6.1.3. Par unicité de la limite faible il vient que $f = T(x)$. Comme la limite ne dépend pas de la sous-suite, on en déduit que c'est toute la suite $T(x_n) \to T(x)$ fortement dans $F$. □

## 6.4 Convergence faible et convexité

**Définition 6.4.1.** Soit $E$ un espace de Banach et $A \subset E$.
- $A$ est *faiblement séquentiellement fermé* si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $A$ avec $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, alors $x \in A$ ;
- $A$ est *faiblement séquentiellement compact* si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $A$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $E$ vers un élément de $A$.

Le lien entre ces nouvelles notions "faibles" et les notions usuelles de fermeture et compacité est donné par le résultat suivant.

**Proposition 6.4.2.** *Soit $A$ une partie d'un espace de Banach $E$.*
*i) Si $A$ est faiblement séquentiellement fermé, alors $A$ est fermé (fort) ;*
*ii) Si $A$ est compact fort, alors il est faiblement séquentiellement compact.*

*Démonstration.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A$ avec $x_n \to x$ fortement dans $E$, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$. L'ensemble $A$ étant faiblement séquentiellement fermé, on en déduit que $x \in A$ et donc que $A$ est fermé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $A$. L'ensemble $A$ étant compact, on peut extraire une sous-suite qui converge fortement (et donc faiblement) dans $E$ vers un élément de $A$. On en déduit que $A$ est faiblement séquentiellement compact. □

**Remarque 6.4.3.**
- Un ensemble faiblement séquentiellement compact est nécessairement faiblement séquentiellement fermé.
- Ces notions faibles diffèrent des notions de fermeture et compacité classique. En effet, si $H$ est un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $H$, alors $S := \{x \in H : \|x\|_H = 1\}$ est fermé mais pas faiblement séquentiellement fermé car $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H$ et $0 \notin S$.

Cependant certaines propriétés coïncident dans le cas convexe.

**Théorème 6.4.4.** *Soit $C$ une partie convexe, non vide d'un espace de Banach $E$. Alors $C$ est fortement fermé si et seulement si il est faiblement fermé.*

*Démonstration.* Nous avons déjà vu dans la proposition 6.4.2 que si l'ensemble $C$ est faiblement séquentiellement fermé, alors $C$ est fermé (la convexité n'est pas utilisée ici).

Réciproquement, supposons que $C$ est un convexe fermé non vide. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C$ avec $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$. Si $x \notin C$, le théorème de Hahn-Banach, seconde forme géométrique (theorème 5.2.7), nous permet de séparer strictement $C$ du convexe compact $\{x\}$. Il existe donc un $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle, \qquad \text{pour tout } y \in C.$$

En particulier pour $y = x_n$, on obtient que $\langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_n\rangle$, puis par passage à la limite $\langle f, x\rangle < \alpha \leq \langle f, x\rangle$, ce qui est absurde. □

Les propriétés établies jusqu'ici pour les ensembles se généralisent aux fonctions.

**Définition 6.4.5.** Soit $E$ un espace de Banach, $A \subset E$ et $J : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $J$ est *faiblement séquentiellement sci* (ou *sci pour la convergence faible*) en $x \in A$ si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A$ avec $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$, on a

$$J(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(x_n).$$

On dit que $J$ est faiblement séquentiellement sci sur $A$ si elle est sci en tout point de $A$.

**Remarque 6.4.6.** On a clairement que si $J$ est faiblement séquentiellement sci, alors $J$ est sci (pour la convergence forte). La réciproque est fausse : il suffit de prendre $J(x) = 1 - \|x\|^2$ pour tout $x \in H$ un espace de Hilbert séparable. Alors $J$ est continue donc sci (pour la convergence forte). En revanche, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $H$, alors $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H$ et

$$J(0) = 1 > 0 = \liminf_{n\to+\infty} J(e_n).$$

Nous pouvons maintenant énoncer l'analogue des propositions 1.4.2 et 1.4.4.

**Proposition 6.4.7.** *Soit $C$ une partie faiblement séquentiellement compacte d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ et $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction faiblement séquentiellement sci sur $C$. Alors il existe un $x_0 \in C$ tel que $J(x_0) \leq J(y)$ pour tout $y \in C$.*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle de la proposition 1.4.1. Il suffit de remplacer les notions fortes par les notions faibles. □

L'un des intérets de travailler avec le convergence faible est d'avoir beaucoup plus d'ensembles séquentiellement compacts. Le résultat suivant généralise la proposition 1.4.4 au cas d'espaces de dimension infinie.

**Proposition 6.4.8.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif et $J : E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction coercive et faiblement séquentiellement sci sur $E$. Alors il existe un $x_0 \in C$ tel que $J(x_0) \leq J(y)$ pour tout $y \in C$.*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle de la proposition 1.4.4. On applique en plus le théorème 6.1.8 qui assure que la suite minimisante (qui est bornée dans $E$) admet une sous-suite faiblement convergente puisque $E$ est réflexif. □

Il reste à voir comment obtenir des fonctions faiblement séquentiellement sci. La convexité va jouer un rôle essentiel.

**Définition 6.4.9.** Soit $C$ une partie convexe non vide d'un espace vectoriel $E$. Une fonction $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si

$$J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y), \qquad \text{pour tout } t \in [0,1] \text{ et tout } x, y \in C.$$

On dit que $J$ est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte dès lors que $x \neq y$ et $t \in ]0,1[$.

**Exemple 6.4.10.**
1. les applications linéaires sont convexes ;
2. les normes $x \mapsto \|x\|$ sont convexes ;
3. dans un espace de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe car si $t \in ]0,1[$ et $x \neq y$,

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)y\|^2 - t\|x\|^2 - (1-t)\|y\|^2 &= t(t-1)\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y\rangle - t(1-t)\|y\|^2 \\ &= -t(1-t)\|x-y\|^2 < 0.\end{aligned}$$

**Théorème 6.4.11.** *Soit $C$ un ensemble convexe fermé d'un espace de Banach $E$ et $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement sci et convexe. Alors $J$ est faiblement séquentiellement sci.*

*Démonstration.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $E$. Comme $C$ est convexe et fermé, il est faiblement séquentiellement fermé d'après le théorème 6.4.4 et donc $x \in C$. Si $\liminf_n J(x_n) = +\infty$, le résultat est évident. Si $\alpha := \liminf_n J(x_n) < +\infty$, on considère une suite décroissante $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\alpha_k \searrow \alpha$. Comme $J$ est convexe est fortement sci, l'ensemble $\{J \le \alpha_k\}$ est convexe et fermé et donc faiblement séquentiellement fermé. Comme $\alpha_k > \alpha = \liminf_n J(x_n)$, il existe une sous-suite (toujours notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) telle que $x_n \in \{J \le \alpha_k\}$, et donc $x \in \{J \le \alpha_k\}$. Par conséquent, $J(x) \le \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui implique par passage à la limite quand $k \to +\infty$ que

$$J(x) \le \alpha = \liminf_{n\to+\infty} J(x_n),$$

ce qui montre que $J$ est faiblement séquentiellement sci. □

Nous en venons à présent au résultat principal d'existence de solutions en calcul des variations.

**Corollaire 6.4.12.** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif. On suppose*

- *soit que $C \subset E$ est une partie convexe, fermée et bornée et $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe sci ;*
- *soit que $C \subset E$ est une partie convexe, fermée et $J : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe sci et coercive.*

*Alors il existe un $x_0 \in C$ tel que $J(x_0) \le J(y)$ pour tout $y \in C$. Si de plus $J$ est strictement convexe, alors le minimum $x_0$ est unique.*

*Démonstration.* Dans le premier cas, la preuve de l'existence résulte de l'applications de la proposition 6.4.7 et du théorème 6.4.11. Dans le second cas, on applique la proposition 6.4.8 et du théorème 6.4.11. Quant à l'unicité, si $x_0$ et $x_1$ sont deux minima distincts de $J$ sur $C$, alors par convexité de $C$ on a $\frac{x_0+x_1}{2} \in C$ et par stricte convexité de $J$, il vient

$$\inf_C J \le J\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) < \frac{1}{2}J(x_0) + \frac{1}{2}J(x_1) = \inf_C J,$$

ce qui est absurde. On en conclut l'unicité du minimum. □

# Chapitre 7

# Espaces de Sobolev en dimension 1

Dans ce chapitre, on désignera par $I$ un intervalle ouvert, non nécessairement borné.

## 7.1 Premières définitions

On rappelle qu'une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ si et seulement si $u \in \mathcal{C}(I)$ et s'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}(I)$ telle que

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \quad \text{pour tout } x \in I, \tag{7.1.1}$$

où $x_0 \in I$ est un point quelconque. En effet, si $x \in I$, comme $g$ est continue en $x$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que si $t \in I$ avec $|t - x| \leq \delta$, alors $|g(t) - g(x)| \leq \varepsilon$. Par conséquent, si $h \in \mathbb{R}$ est tel que $|h| \leq \delta$, alors (par exemple si $h > 0$),

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - g(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} g(t)\, dt - g(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} [g(t) - g(x)]\, dt,$$

soit

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - g(x) \right| \leq \varepsilon,$$

et donc $u'(x) = g(x)$. Ceci montre que si (7.1.1) a lieu, alors nécessairement $u' = g \in \mathcal{C}(I)$ et donc $u \in \mathcal{C}^1(I)$. Réciproquement, si $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, alors (7.1.1) a lieu avec $g = u'$.

De façon générale, on a la définition suivante.

**Définition 7.1.1.** Soit $1 \leq p \leq \infty$. On désigne par $W^{1,p}(I)$ l'ensemble des fonctions $u \in L^p(I)$ telles qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $g \in L^p(I)$ qui satisfont

$$u(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \quad \text{presque pour tout } x \in I, \tag{7.1.2}$$

où $x_0 \in \overline{I}$ est un point donné. Dans le cas $p = 2$, on note aussi $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Il convient d'abord de vérifier que si le couple $(c, g) \in \mathbb{R} \times L^p(I)$ existe, alors il est unique.

**Proposition 7.1.2.** *i) Soit $u \in W^{1,p}(I)$, pour $1 \leq p \leq \infty$. Le couple $(c, g) \in \mathbb{R} \times L^p(I)$ tel que l'on ait (7.1.2) est unique ;*

*ii) Si $u \in \mathcal{C}^1(I)$, alors on a de plus que $g = u'$ et $c = u(x_0)$.*

*Démonstration.* i) Supposons que l'on ait pour presque tout $x \in I$

$$u(x) = c_1 + \int_{x_0}^{x} g_1(t)\,dt = c_2 + \int_{x_0}^{x} g_2(t)\,dt,$$

où $c_1$, $c_2 \in \mathbb{R}$ et $g_1$, $g_2 \in L^p(I)$. Par différence, pour presque tout $x \in I$

$$\int_{x_0}^{x} [g_1(t) - g_2(t)]\,dt = c_2 - c_1,$$

ou encore pour presque tout $(x, y) \in I \times I$ avec $y \geq x$

$$\int_{x}^{y} [g_1(t) - g_2(t)]\,dt = \int_I \chi_{]x,y[}(g_1 - g_2)\,dt = 0.$$

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, alors il existe une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $\{(a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, tels que $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule précédente et l'additivité de l'intégrale, on obtient que

$$\int_I \chi_{\bigcup_{i=1}^{N}]a_i,b_i[}(g_1 - g_2)\,dt = \sum_{i=1}^{N} \int_I \chi_{]a_i,b_i[}(g_1 - g_2)\,dt = 0.$$

Comme $\chi_{\bigcup_{i=1}^{N}]a_i,b_i[}(g_1 - g_2) \to \chi_U(g_1 - g_2)$ p.p. dans $I$ quand $N \to +\infty$ et $|\chi_{\bigcup_{i=1}^{N}]a_i,b_i[}(g_1 - g_2)| \leq |g_1 - g_2| \in L^p(I)$, le théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\int_I \chi_U(g_1 - g_2)\,dt = \lim_{N\to+\infty} \int_I \chi_{\bigcup_{i=1}^{N}]a_i,b_i[}(g_1 - g_2)\,dt = 0.$$

Soit maintenant $E \subset I$ un ensemble Borélien. Par la régularité extérieure la mesure de Lebesgue (voir la Proposition 3.3.3), il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $E \subset U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda(U_n \ \setminus E) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par convergence dominée, on montre de nouveau que

$$\int_I \chi_E(g_1 - g_2)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I \chi_{U_n}(g_1 - g_2)\,dt = 0.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que si $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction Borélienne étagée, alors

$$\int_I h(g_1 - g_1)\,dt = 0,$$

puis par densité des fonctions étagées dans $L^{p'}(I)$ (voir le Théorème 3.3.1), on en déduit que la formule précédente est en fait vraie pour $h \in L^{p'}(I)$ et donc aussi, en particulier, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Le Corollaire 3.3.10 montre alors que $g_1 = g_2$ p.p. dans $I$, et par suite que $c_1 = c_2$.

ii) Si $u \in \mathcal{C}^1(I)$, alors d'après (7.1.2) et le fait que pour tout $x \in I$, on a

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt,$$

le résultat d'unicité juste établi montre que $c = u(x_0)$ et $g = u'$. $\square$

**Remarque 7.1.3.** Par abus de notation, on notera, même si $u$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$

$$g = u' = \dot{u} = \frac{du}{dx}.$$

Il s'agit d'une notion de dérivée en un sens généralisé, appelée aussi *dérivé faible* (weak en anglais), qui coïncide avec la notion usuelle de dérivée pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

On munit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \left(\|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'\|^p_{L^p(I)}\right)^{1/p}.$$

**Proposition 7.1.4.** *L'espace $W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$. Si, $p = 2$, l'espace $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(I)} := \int_I (uv + u'v')\, dx.$$

*Démonstration.* Le fait que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ est une norme sur $W^{1,p}(I)$ découle du fait que $\|\cdot\|_{L^p(I)}$ est une norme sur $L^p(I)$ et de l'inégalité $(a^p + b^p)^{1/p} \le a + b$ pour $a \ge 0$ et $b \ge 0$. Montrons maintenant que $W^{1,p}(I)$ est complet. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(I)$. Du fait que

$$\|u_n - u_m\|^p_{W^{1,p}(I)} = \|u_n - u_m\|^p_{L^p(I)} + \|u'_n - u'_m\|^p_{L^p(I)},$$

il en résulte que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^p(I)$. D'après le Théorème de Riesz-Fischer, $u_n \to u$ et $u'_n \to g$ dans $L^p(I)$. Comme, pour presque tout $x \in I$, on a

$$u_n(x) = c_n + \int_{x_0}^{x} u'_n(t)\, dt, \tag{7.1.3}$$

on en déduit que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et donc, pour une sous-suite, $c_n \to c$. D'après la réciproque de la convergence dominée (voir le Corollaire 3.2.3), on a $u_n \to u$ presque partout dans $I$. Par ailleurs l'inégalité de Hölder montre que pour tout $x \in I$,

$$\left|\int_{x_0}^{x} u'_n(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt\right| \le |x - x_0|^{1/p'} \|u'_n - g\|_{L^p(I)} \to 0.$$

Par passage à la limite dans (7.1.3), on en déduit que pour presque tout $x \in I$,

$$u(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt,$$

ce qui montre bien que $u \in W^{1,p}(I)$ et donc que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I)$.

Si $p = 2$, on montre facilement que

$$(u, v) \in H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \langle u, v\rangle_{H^1(I)} := \int_I (uv + u'v')\, dx$$

est un produit scalaire sur $H^1(I)$ et que $\|u\|^2_{H^1(I)} = \langle u, u\rangle_{H^1(I)}$ ce qui montre que $H^1(I)$ est un espace de Hilbert. □

De manière générale, étant donné un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, on peut définir pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$,

$$W^{m,p}(I) := \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose alors

$$\frac{d^k u}{dx^k} = u^{(k)} = (u')^{(k-1)}$$

la $k$-ième ($0 \leq k \leq m$) dérivée généralisée de $u$ (par convention $u^{(0)} = u$). Si l'on munit $W^{m,p}(I)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} := \left( \sum_{k=0}^{m} \|u^{(k)}\|^p_{L^p(I)} \right)^{1/p},$$

alors, on montre de même que $W^{m,p}(I)$ est un espace de Banach. Pour $p = 2$, on note $H^m(I) = W^{m,2}(I)$ qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(I)} := \sum_{k=0}^{m} \int_I u^{(k)} v^{(k)}\, dx.$$

## 7.2 Propriétés de $W^{1,p}(I)$

### 7.2.1 Continuité

Nous démontrons tout d'abord un premier résultat assurant que l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ s'injecte continûment dans l'espace des fonctions continues au sens où toute fonction de $W^{1,p}(I)$ admet un représentant continu la classe d'équivalence des fonctions qui lui sont égales presque partout.

**Théorème 7.2.1.** *Pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, il existe un représentant $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\overline{I})$ tel que $u = \tilde{u}$ presque partout sur $I$. De plus, si $I = ]a, b[$ est un intervalle borné, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{C}(\overline{I})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(I).$$

*Démonstration.* Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour presque tout $x \in I$,

$$u(x) = c + \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt.$$

Pour tout $x \in \overline{I}$, on pose

$$\tilde{u}(x) := c + \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt.$$

Notons que $u = \tilde{u}$ presque partout sur $I$ et montrons que $\tilde{u}$ est continue sur $\overline{I}$. Si $1 < p \leq \infty$, alors pour tout $x, y \in I$ avec $x < y$, on a par l'inégalité de Hölder

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| = \left| \int_x^y u'(t)\, dt \right| \leq \|u'\|_{L^p(I)} |x - y|^{1-1/p} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)} |x - y|^{1-1/p},$$

ce qui montre que $\tilde{u}$ est Höldérienne et donc continue. Si $p = 1$, on utilise le théorème de la convergence dominée pour établir que

$$|\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)| \leq \int_x^y |u'(t)|\, dt \to 0 \quad \text{quand } y \to x.$$

Comme $\tilde{u}$ est continue sur $\overline{I} = [a,b]$, on utilise la formule de la moyenne pour trouver un $x_0 \in [a,b]$ tel que

$$|\tilde{u}(x_0| = \frac{1}{b-a}\int_a^b |\tilde{u}(t)|\,dt \leq (b-a)^{-1/p}\|u\|_{L^p(I)},$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder. Il en résulte que pour tout $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}|\tilde{u}(x)| \leq |\tilde{u}(x_0)| \ + |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x_0)| \ &\leq |x-x_0|^{1-1/p}\|u'\|_{L^p(I)} + (b-a)^{-1/p}\|u\|_{L^p(I)} \\ &\leq \left((b-a)^{1-1/p} + (b-a)^{-1/p}\right)\|u\|_{W^{1,p}(I)}.\end{aligned}$$

Par passage au sup en $x \in \overline{I}$ dans le membre de droite, il vient

$$\sup_{x\in\overline{I}} |\tilde{u}(x)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)},$$

ce qui établit l'inégalité annoncée. □

**Remarque 7.2.2.** Par la suite, on identifiera systématiquement une fonction Sobolev avec son représentant continu. Il faut noter toutefois que cette propriété des fonctions Sobolev est fause en dimension supérieure. Seules les fonctions Sobolev en dimension 1 sont continues.

**Remarque 7.2.3.** On démontre de même que toute fonction $W^{m,p}(I)$ admet un représentant $\tilde{u} \in \mathcal{C}^{m-1}(\overline{I})$ et si $I = ]a,b[$ est un intervalle borné, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{C}^{m-1}(\overline{I})} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(I)} \quad \text{pour tout } u \in W^{m,p}(I).$$

Le résultat précédent d'injection continue de $W^{1,p}(I)$ dans $\mathcal{C}(\overline{I})$ peut être amélioré dans le cas où $I$ est un intervalle borné. L'injection est alors compacte.

**Théorème 7.2.4.** *Soit $I = ]a,b[$ un intervalle ouvert borné et $1 < p \leq \infty$. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $W^{1,p}(]a,b[)$ telle que*

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{W^{1,p}(]a,b[)} < +\infty,$$

*alors il existe une sous-suite suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in \mathcal{C}([a,b]))$ telles que $u_n \to u$ uniformément sur $[a,b]$.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 7.2.1, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}([a,b]))$. Par ailleurs, si l'on écrit pour tout $x \in [a,b]$,

$$u_n(x) = c_n + \int_{x_0}^x u_n'(t)\,dt,$$

où $c_n \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in ]a,b[$, alors, pour tout $x$, $y \in [a,b]$ avec $y > x$, on obtient grâce à l'inégalité de Hölder

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \int_x^y |u_n'(t)|\,dt \leq |x-y|^{1-1/p}\|u_n'\|_{L^p(]a,b[)} \leq M|x-y|^{1-1/p}.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équi-continue. La conclusion suit donc d'une application immédiate du Théorème d'Ascoli. □

### 7.2.2 Densité des fonctions régulières

**Théorème 7.2.5.** *Soit $1 \leq p < \infty$, alors $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.*

*Démonstration.* Nous donnons la démonstration dans le cas où $I = ]a, b[$ est un intervalle borné. Si $u \in W^{1,p}(I)$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$u(x) = c + \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt.$$

D'après le Corollaire 3.3.9, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $f_n \to u'$ dans $L^p(I)$. On pose alors pour tout $x \in I$,

$$u_n(x) := c + \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$$

de sorte que $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I})$. De plus, par construction, $u_n' = f_n \to u$ dans $L^p(I)$ et par l'inégalité de Hölder, on a pour tout $x \in I$,

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |u_n'(t) - u'(t)|\,dt \leq \|u_n' - u'\|_{L^p(I)}(b-a)^{1-1/p},$$

puis après élévation à la puissance $p$ et intégration,

$$\|u_n - u\|_{L^p(I)} \ \leq (b-a)\|u_n' - u'\|_{L^p(I)} \to 0,$$

ce qui montre bien que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I)$. □

**Remarque 7.2.6.** On montre de même que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$, alors $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ est dense dans $W^{m,p}(I)$.

### 7.2.3 Séparabilité

**Théorème 7.2.7.** *Si $1 \leq p < \infty$, alors l'espace $W^{1,p}(I)$ est séparable.*

*Démonstration.* Soit $\theta : W^{1,p}(I) \to L^p(I) \times L^p(I)$ l'application définie par

$$\theta(u) = (u, u') \qquad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(I).$$

Notons que $\theta$ est une application linéaire et, en munissant $L^p(I) \times L^p(I)$ de la norme produit

$$\|(u,v)\|_{L^p(I)\times L^p(I)} := \left(\|u\|^p_{L^p(I)} + \|v\|^p_{L^p(I)}\right)^{1/p},$$

on en déduit que $\theta$ est continue et même une isométrie puisque pour tout $u \in W^{1,p}(I)$,

$$\|\theta(u)\|_{L^p(I)\times L^p(I)} := \left(\|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'\|^p_{L^p(I)}\right)^{1/p} = \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Par conséquent, $\mathrm{Im}(\theta)$ est un sous-espace fermé de $L^p(I) \times L^p(I)$. Or d'après la Proposition 3.4.1 $L^p(I) \times L^p(I)$ est séparable ce qui montre que $\mathrm{Im}(\theta)$ est également séparable. Comme $W^{1,p}(I)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(\theta)$, on en déduit que $W^{1,p}(I)$ est séparable. □

**Remarque 7.2.8.** On montre de même que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p < \infty$, alors l'espace $W^{m,p}(I)$ est séparable.

### 7.2.4 Réfléxivité

**Théorème 7.2.9.** *Si $1 < p < \infty$, alors l'espace $W^{1,p}(I)$ est réflexif.*

*Démonstration.* Comme $\mathrm{Im}(\theta)$ est un sous-espace fermé de $L^p(I) \times L^p(I)$ qui est réflexif d'après le Théorème 4.3.5, on en déduit et de la Proposition 5.2.13 que $\mathrm{Im}(\theta)$ est réflexif. Comme $W^{1,p}(I)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(\theta)$, on en déduit que $W^{1,p}(I)$ est réflexif. □

**Remarque 7.2.10.** On montre de même que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 < p < \infty$, alors l'espace $W^{m,p}(I)$ est réflexif.

### 7.2.5 Formule d'intégration par parties

Les fonctions de $W^{1,p}(I)$ étant continues, il est légitime de parler de leur valeur en un point $x_0 \in \overline{I}$. On peut alors généraliser la formule d'intégration par parties aux fonctions $W^{1,p}(I)$.

**Proposition 7.2.11.** *Soit $I = ]a, b[$ un intervalle ouvert borné et $u$, $v \in W^{1,p}(I)$. On a l'égalité*

$$\int_a^b u'v\,dx = -\int_a^b uv'\,dx + u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

*Démonstration.* D'après le Théorème 7.2.5, il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ telles que $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans $W^{1,p}(I)$. Par suite, le Théorème 7.2.1 montre que $u_n \to u$ et $v_n \to v$ uniformément sur $[a, b]$. D'après la formule d'intégration par parties usuelle, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b u_n'v_n\,dx = -\int_a^b u_n v_n'\,dx + u_n(b)v_n(b) - u_n(a)v_n(a).$$

D'après ce qui précède, $u_n(b)v_n(b) - u_n(a)v_n(a) \to u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Par ailleurs, comme $u_n \to u$ dans $L^\infty(I)$ et $v_n' \to v'$ dans $L^p(I)$, il vient $\int_a^b u_n v_n'\,dx \to \int_a^b uv'\,dx$. On montre de même que $\int_a^b u_n' v_n\,dx \to \int_a^b u'v\,dx$. Par passage à la limite, il vient alors

$$\int_a^b u'v\,dx = -\int_a^b uv'\,dx + u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

□

La formule d'intégration par parties permet d'établir une caractérisation des fonctions $W^{1,p}(I)$ qui pourra se généraliser aisément aux fonctions de plusieurs variables.

**Théorème 7.2.12.** *Soit $1 \le p \le \infty$ et $u \in L^p(I)$. Alors $u \in W^{1,p}(I)$ si et seulement s'il existe une fonction $f \in L^p(I)$ telle que*

$$\int_I u\varphi'\,dx = -\int_I f\varphi\,dx \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

*Démonstration.* Si $u \in W^{1,p}(I)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, alors $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset [a, b] \subset I$ de sorte que $\varphi \in W^{1,p}(]a, b[)$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. En vertu de la formule d'intégration par parties, on en déduit que

$$\int_I u\varphi'\,dx = \int_a^b u\varphi'\,dx = -\int_a^b u'\varphi\,dx = -\int_I u'\varphi\,dx.$$

Réciproquement, supposons que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ on ait

$$\int_I u\varphi' \, dx = -\int_I f\varphi \, dx.$$

Posons alors $v(x) := \int_{x_0}^x f(t)\, dt$ pour tout $x \in I$, où $x_0 \in I$. Par définition, on a que $v \in W^{1,p}(I)$, $v' = f$ et d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_I v\varphi' \, dx = -\int_I f\varphi \, dx,$$

soit,

$$\int_I (u-v)\varphi' \, dx = 0.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$, alors $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset [a,b] \subset I$ et soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ telle que $\theta \geq 0$ et $\int_a^b \theta \, dt = 1$. On pose alors

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \left( \int_a^b \varphi(t)\, dt \right) \theta$$

de sorte que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ et $\int_a^b \tilde{\varphi}(t)\, dt = 0$. On pose enfin

$$\psi(x) := \int_a^x \tilde{\varphi}(t)\, dt \quad \text{pour tout} \quad x \in [a,b],$$

avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$. Si $\varepsilon > 0$ est tel que $\mathrm{Supp}(\tilde{\varphi}) \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, alors $\psi = 0$ sur $[a, a+\varepsilon]$. Par ailleurs comme $\int_a^b \tilde{\varphi}(t)\, dt = 0$ et $\tilde{\varphi} = 0$ sur $[b-\varepsilon, b]$, on en déduit que $\int_a^x \tilde{\varphi}(t)\, dt = 0$ pour tout $x \in [b-\varepsilon, b]$ ce qui montre que $\psi = 0$ sur $[b-\varepsilon, b]$. On a finalement montré que $\mathrm{Supp}(\psi) \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, autrement dit que $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$. On en déduit alors que

$$\int_a^b (u-v)\psi' \, dx = 0$$

et comme $\psi' = \tilde{\varphi}$, il vient

$$\int_a^b (u-v)\varphi \, dx = \left( \int_a^b (u-v)\theta \, dx \right) \left( \int_a^b \varphi \, dt \right).$$

En posant $c = \int_a^b (u-v)\theta \, dx$, on a établi que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$

$$\int_I (u-v-c)\varphi \, dx = 0,$$

ce qui implique, d'après le Corollaire 3.3.10, que $u = c + v$ p.p. sur $I$ et donc que $u \in W^{1,p}(I)$. $\square$

## 7.3 Dualité et convergence faible

Commençons par caractériser le dual de $W^{1,p}(I)$.

**Théorème 7.3.1.** *Soit $1 \leq p < \infty$ et $L \in [W^{1,p}(I)]'$, alors il existe des fonctions $f$ et $g \in L^{p'}(I)$ telles que*

$$L(u) = \int_I (fu + gu')\, dx \qquad \textit{pour tout } u \in W^{1,p}(I),$$

*et*

$$\|L\|_{[W^{1,p}(I)]'} = \left( \int_I (|f|^{p'} + |g|^{p'})\, dx \right)^{1/p'}.$$

*Démonstration.* Soit $\theta : W^{1,p}(I) \to L^p(I) \times L^p(I)$ l'application définie dans la démonstration du Théorème 7.2.7. Si $L \in [W^{1,p}(I)]'$, alors $T := L \circ \theta^{-1}$ définit une application linéaire continue sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(\theta)$ de $L^p(I) \times L^p(I)$. D'après le Corollaire 5.1.2, on peut étendre $T$ en une forme linéaire continue $\tilde{T} \in [L^p(I) \times L^p(I)]'$ avec

$$\|\tilde{T}\|_{[L^p(I)\times L^p(I)]'} = \|T\|_{[\mathrm{Im}(\theta)]'} = \|L\|_{[W^{1,p}(I)]'},$$

où l'on a utilisé le fait que $\theta$ est une isométrie dans la dernière inégalité. Par le Théorème 4.3.5, il existe des fonctions des fonctions $f$ et $g \in L^{p'}(I)$ telles que

$$T(u, v) = \int_I (fu + gv)\, dt \qquad \text{pour tout } (u, v) \in L^p(I) \times L^p(I)$$

et

$$\|\tilde{T}\|_{[L^p(I)\times L^p(I)]'} = \left( \int_I (|f|^{p'} + |g|^{p'})\, dx \right)^{1/p'}.$$

En particulier, on a

$$L(u) = T \circ \theta(u) = T(u, u') = \int_I (fu + gu')\, dx \qquad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(I),$$

et

$$\|L\|_{[W^{1,p}(I)]'} = \left( \int_I (|f|^{p'} + |g|^{p'})\, dx \right)^{1/p'}$$

comme annoncé. □

L'identification du dual permet de décrire précisément la convergence faible dans $W^{1,p}(I)$.

**Proposition 7.3.2.** *Soit $1 \leq p < \infty$. Alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $W^{1,p}(I)$ converge faiblement vers $u$ dans $W^{1,p}(I)$ si et seulement si*

$$u_n \rightharpoonup u \textit{ et } u_n' \rightharpoonup u' \textit{ faiblement dans } L^p(I).$$

*Démonstration.* Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(I)$. Comme, pour tout $f \in L^{p'}(I)$, les applications

$$u \mapsto \int_I fu\, dx, \quad u \mapsto \int_I fu'\, dx$$

définissent des formes linéaires continues sur $W^{1,p}(I)$, on en déduit que

$$\int_I fu_n\, dx \to \int_I fu\, dx, \quad \int_I fu_n'\, dx \to \int_I fu'\, dx,$$

ce qui montre que $u_n \rightharpoonup u$ et $u_n' \rightharpoonup u'$ faiblement dans $L^p(I)$.

Réciproquement, soit $L \in [W^{1,p}(I)]'$. D'après le Théorème 7.3.1, on peut trouver des fonctions $f$ et $g \in L^{p'}(I)$ telles que

$$L(u) = \int_I (fu + gu')\, dx \qquad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(I).$$

Par conséquent, si $u_n \rightharpoonup u$ et $u_n' \rightharpoonup u'$ faiblement dans $L^p(I)$, alors en particulier,

$$L(u_n) = \int_I (fu_n + gu_n')\, dx \to \int_I (fu + gu')\, dx = L(u),$$

ce qui montre que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(I)$. □

## 7.4 L'espace $W_0^{m,p}$

On suppose dans cette section que $I = ]a,b[$ est un intervalle borné.

**Définition 7.4.1.** Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W_0^{m,p}(]a,b[)$ comme la fermeture des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ dans $W^{m,p}(]a,b[)$.

Par construction, $W_0^{m,p}(]a,b[)$ est un sous-espace fermé dans $W^{m,p}(]a,b[)$. Il est donc séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.

**Proposition 7.4.2.** *Si $u \in W_0^{1,p}(]a,b[)$ alors $u(a) = u(b) = 0$.*

*Démonstration.* Par définition , il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(]a,b[)$. Comme $\mathrm{Supp}(u_n) \subset ]a,b[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $u_n(a) = u_n(b) = 0$ et d'après le Théorème 7.2.1, on en déduit que

$$|u_n(a) - u(a)| \leq C\|u_n - u\|_{W^{1,p}(]a,b[)} \to 0, \quad |u_n(b) - u(b)| \leq C\|u_n - u\|_{W^{1,p}(]a,b[)} \to 0,$$

ce qui montre bien que $u(a) = u(b) = 0$. □

**Proposition 7.4.3 (Inégalité de Poincaré).** *Soit $1 \leq p < \infty$.*

*i) Pour tout $u \in W_0^{1,p}(]a,b[)$,*

$$\|u\|_{L^p(]a,b[)} \;\leq \left(\frac{1}{p}\right)^{1/p} (b-a)\; \|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$

*ii) Sur $W_0^{1,p}(]a,b[)$ la norme*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(]a,b[)} = \left(\int_a^b |u'|^p\, dx\right)^{1/p}$$

*est équivalente à la norme $W^{1,p}(]a,b[)$. En particulier, sur $H_0^1(]a,b[)$, le produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(]a,b[)} := \int_a^b u'v'\, dx$$

*est équivalent au produit scalaire $H^1(]a,b[)$.*

*Démonstration.* i) Pour $u \in W_0^{1,p}(]a,b[)$, on a pour tout $x \in ]a,b[$,

$$u(x) = \int_a^c u'(t)\,dt$$

et par l'inégalité de Hölder

$$|u(x)| \leq |x-a|^{1-1/p} \|u'\|_{L^p(]a,b[)}.$$

En élevant à la puissance $p$ puis en intégrant, il vient

$$\int_a^b |u|^p\,dx \leq \left( \int_a^b |x-a|^{p-1}\,dx \right) \|u'\|^p_{L^p(]a,b[)}$$

et l'inégalité s'en déduit.

ii) On démontre aisément que $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(]a,b[)}$ est effectivement une norme sur $W_0^{1,p}(]a,b[)$. On a pour tout $v \in W_0^{1,p}(]a,b[)$,

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(]a,b[)} = \|v'\|_{L^p(]a,b[)} \leq \left( \|v\|^p_{L^p(]a,b[)} + \|v'\|^p_{L^p(]a,b[)} \right)^{1/p} = \|v\|_{W_0^{1,p}(]a,b[)}.$$

Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré montre que

$$\|v\|^p_{W_0^{1,p}(]a,b[)} = \|v\|^p_{L^p(]a,b[)} + \|v'\|^p_{L^p(]a,b[)} \leq \left( 1 + \frac{(b-a)^p}{p} \right) \|v'\|^p_{L^p(]a,b[)},$$

ce qui établi que

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(]a,b[)} \leq C \|v'\|_{L^p(]a,b[)}$$

et donc le fait que les normes $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(]a,b[)}$ et $\|\cdot\|_{W^{1,p}(]a,b[)}$ sont équivalentes. □

# Chapitre 8

# Formulation variationnelle et solutions faibles des problèmes aux limites

## 8.1 Problèmes aux limites

Soit $c \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $c \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Nous cherchons une fonction $u$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Il s'agit d'un problème aux limites : le théorème de Cauchy-Lipschitz ne permet pas de conclure directement à l'existence et à l'unicité d'une solution car on impose des conditions aux deux bornes de l'intervalle (alors que Cauchy-Lipschitz correspondrait à des conditions uniquement en 0). Nous allons voir dans ce chapitre comment la formulation variationnelle de (8.1.1) permet d'obtenir des solutions grâce au Théorème de Lax-Milgram. Cette formulation a par ailleurs l'avantage de se transposer directement aux problèmes en dimension supérieure qui ne seront pas abordés dans ce cours.

## 8.2 Formulation variationnelle

Nous pouvons tout d'abord reformuler le problème aux limites (8.1.1) de la façon suivante.

**Proposition 8.2.1.** *Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que $u(0) = u(1) = 0$. La fonction $u$ est solution de* (8.1.1) *si et seulement si*

$$\int_0^1 (u'\varphi' + cu\varphi)\, dx = \int_0^1 f\varphi\, dx \qquad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[). \tag{8.2.1}$$

*Démonstration.* Si $u$ est solution de (8.1.1), on multiplie l'équation par $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ puis on intègre sur $]0,1[$. Après une intégration par parties, on obtient bien la formule (8.2.1).

Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est telle que $u(0) = u(1) = 0$ et satisfait (8.2.1), alors après intégration par parties, il vient que

$$\int_0^1 (-u'' + cu - f)\varphi\, dx = 0 \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[),$$

ce qui implique que $-u'' + cu - f = 0$ presque partout sur $]0,1[$ d'après le Corollaire 3.3.10. Du fait que $-u'' + cu - f$ est continue sur $[0,1]$, on obtient en fait que $-u'' + cu - f = 0$ partout sur $[0,1]$, ce qui montre bien que $u$ est solution de (8.1.1). □

La Proposition 8.2.1 conduit naturellement à la définition suivante de *formulation variationnelle* ou *formulation faible* du problème (8.1.1)

**Définition 8.2.2.** Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$, nous dirons que $u$ est *solution faible* de (8.1.1) si

$$\int_0^1 (u'\varphi' + cu\varphi)\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[).$$

Comme $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ est dense dans $H_0^1(]0,1[)$, il résulte de (8.2.1) que

**Proposition 8.2.3.** *La fonction $u \in H_0^1(]0,1[)$ est solution faible de (8.1.1) si et seulement si*

$$\int_0^1 (u'v' + cuv)\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \textit{pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire.

**Définition 8.2.4.**
- *Solution classique* : c'est une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ de (8.1.1) pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ ;
- *Solution forte* : c'est une fonction $u \in W^{2,p}(]0,1[)$ (pour un certain $1 \le p \le \infty$) telle que $u(0) = u(1) = 0$ et
$$-u'' + cu = f \quad \text{p.p. sur } [0,1].$$
Cette notion a en particulier un sens pour $f \in L^p([0,1])$.

Il est clair que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors toute solution classique et un solution forte et que toute solution forte est une solution faible. On peut en fait montrer la récriproque, *i.e.* que les trois notions coïncident.

**Théorème 8.2.5 (Régularité elliptique).** *i) Soit $f \in L^2([0,1])$ et $u \in H_0^1(]0,1[)$ une solution faible de (8.1.1). Alors $u \in H^2(]0,1[)$ est une solution forte.*
*ii) Si de plus $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution classique.*

*Démonstration.* i) Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$ est une solution faible, alors

$$\int_0^1 u'\varphi'\,dx = \int_0^1 (f - cu)\varphi\,dx.$$

Comme $f \in L^2([0,1])$, $c \in \mathcal{C}([0,1]) \subset L^\infty([0,1])$ et $u \in L^2([0,1]$, il vient que $f - cu \in L^2([0,1])$ et d'après le Théorème 7.2.12, on en déduit que $u' \in H^1(]0,1[)$, soit $u \in H^2(]0,1[)$. De plus, par définition de la dérivée généralisée, on a $-u'' = f - cu$ p.p. sur $[0,1]$, ce qui montre que $u$ est une solution forte.

ii) Comme $u \in H^2(]0,1[)$, alors d'après le Théorème 7.2.1 il vient $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Du fait que $c \in \mathcal{C}([0,1])$ et si, de plus, $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $u'' = cu - f \in \mathcal{C}([0,1])$ ce qui montre que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Par conséquent, on a que $-u'' = f - cu$ partout sur $[0,1]$ et donc que $u$ est une solution classique. □

## 8.3 Existence et unicité de solutions faibles

Nous allons à présent établir le caractère bien posé de la formulation faible.

**Théorème 8.3.1.** *Soit $f \in L^2([0,1])$ et $c \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $c \geq 0$. Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(]0,1[)$ telle que*

$$\int_0^1 (u'v' + cuv)\, dx = \int_0^1 fv\, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

**Remarque 8.3.2.** Notons que la condition aux limites $u(0) = u(1) = 0$ est prise en compte dans le fait que $u \in H_0^1(]0,1[)$. Une telle condition s'appelle condition de *Dirichlet homogène.*

*Démonstration.* On utilise le Théorème de Riesz (ou de Lax-Milgram) sur l'espace de Hilbert $H_0^1(]0,1[)$. On définit la forme bilinéaire $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ par

$$a(u,v) \int_0^1 (u'v' + cuv)\, dx \quad \text{pour tout } u, v \in H_0^1(]0,1[)$$

et la forme linéaire $L : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ par

$$L(v) = \int_0^1 fv\, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2([0,1])} \|v\|_{L^2([0,1])} \leq \|f\|_{L^2([0,1])} \|v\|_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui montre que $L$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(]0,1[)$.

En utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $u$, $v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|u'\|_{L^2([0,1])} \|v'\|_{L^2([0,1])} + \|c\|_{L^\infty([0,1])} \|u\|_{L^2([0,1])} \|v\|_{L^2([0,1])} \\ &\leq \left(1 + \|c\|_{L^\infty([0,1])}\right) \|u\|_{H^1(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la forme bilinéaire $a$ est continue sur $H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$.

Enfin si $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a

$$a(u,u) = \int_0^1 (u')^2 + cu^2)\, dx \geq \int_0^1 (u')^2\, dx$$

car $c \geq 0$. D'après l'inégalité de Poincaré on obtient donc que

$$a(u,u) \geq c\|u\|^2_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui établit la coercivité de $a$.

D'après le Théorème de Lax-Milgram, on en déduit l'existence et l'unicité d'un $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$. □

**Remarque 8.3.3.** Notons que, du fait de la symmétrie de $a$ ($a(u,v) = a(v,u)$ pour $(u,v) \in H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[)$), on aurait tout aussi bien pu utliser le Théorème de Riesz. En particulier, la Proposition 4.2.6 montre que $u$ est l'unique minimum de la fonctionnelle $J : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(v')^2 + cv^2\right] dx - \int_0^1 fv\, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0,1[).$$

## 8.4 Généralisation avec un terme d'ordre 1

Soient $b \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et $c \in \mathcal{C}([0,1])$ données. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{8.4.1}$$

En reprenant les arguments de la section précédente, on voit que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ satisfait $u(0) = u(1) = 0$ est solution de (8.4.1) si et seulement si

$$\int_0^1 (u'\varphi' + bu'\varphi + cu\varphi)\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[).$$

Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$, nous sommes conduit à définir la formulation variationnelle de (8.4.1) de la façon suivante.

**Définition 8.4.1.** On dira que $u \in H_0^1(]0,1[)$ est solution faible de (8.4.1) si et seulement si

$$\int_0^1 (u'v' + bu'v + cuv)\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0,1[). \tag{8.4.2}$$

**Théorème 8.4.2.** *Soient $b \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $c \in \mathcal{C}([0,1])$ des fonctions données telles que $c - \frac{1}{2}b' \geq 0$ et $f \in L^2([0,1])$. Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(]0,1[)$ de (8.4.1).*

*Démonstration.* Tout comme dans la démonstration du Théorème 8.3.1, on montre que l'application $L : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(v) = \int_0^1 fv\,dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0,1[)$$

est une forme linéaire continue sur $H_0^1(]0,1[)$. On définit l'application $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ par

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + bu'v + cuv)\,dx \quad \text{pour tout } u, v \in H_0^1(]0,1[).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a que

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2([0,1])}\|v'\|_{L^2([0,1])} &+ \|b\|_{L^\infty([0,1])}\|u'\|_{L^2([0,1])}\|v\|_{L^2([0,1])} \\ &+ \|c\|_{L^\infty([0,1])}\|u\|_{L^2([0,1])}\|v\|_{L^2([0,1])} \\ &\leq \left(1 + \|b'\|_{L^\infty([0,1])} + \|c\|_{L^\infty([0,1])}\right)\|u\|_{H^1(]0,1[)}\|v\|_{H^1(]0,1[)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $a$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(]0,1[)$. Montrons à présent la coercivité de $a$. Tout d'abord, remarquons que si $u \in H_0^1(]0,1[)$ et $b \in \mathcal{C}^1([0,1])$, alors $bu \in H_0^1(]0,1[)$ et $(bu)' = b'u + bu'$. D'après la formule d'intégration par parties, il vient

$$\int_0^1 bu'u\,dx = -\int_0^1 buu'\,dx - \int_0^1 b'u^2\,dx,$$

soit

$$\int_0^1 bu'u\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 b'u^2\,dx.$$

Par conséquent,

$$a(u,u) \geq \int_0^1 ((u')^2 + cu^2)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 b'u^2\,dx \geq \int_0^1 (u')^2\,dx,$$

car $c - \frac{1}{2}b' \geq 0$. On utilise de nouveau l'inégalité de Poincaré pour obtenir que

$$a(u,u) \geq c\|u\|^2_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui établit la coercivité de $a$.

D'après le Théorème de Lax-Milgram, on en déduit l'existence et l'unicité d'un $u \in H^1_0(]0,1[)$ tel que $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in H^1_0(]0,1[)$. □

**Remarque 8.4.3.** Notons qu'ici a forme biliénaire n'est pas symétrique et donc, il n'est pas possible de conclure par la seule application du Théorème de Riesz.

En raisonnant comme dans la section précédente on montre aussi le résultat suivant.

**Théorème 8.4.4 (Régularité elliptique).** *Soit $u \in H^1_0(]0,1[)$ l'unique solution faible de (8.4.1), alors $u \in H^2(]0,1[)$ est une solution forte. Si de plus $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution classique.*

## 8.5 Condition de Dirichlet non homogène

On se place dans les mêmes conditions qu'à la section précédente, à savoir $b \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $c \in \mathcal{C}([0,1])$ telles que $c - \frac{1}{2}b' \geq 0$ et $f \in L^2([0,1])$. Soient $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On considère ici le problème de Dirichlet avec *conditions limites non homogènes* :

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in [0,1], \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases} \tag{8.5.1}$$

L'espace naturel de solution est ici un espace *affine* à savoir

$$V = \{v \in H^1(]0,1[) : v(0) = \alpha,\ v(1) = \beta\}.$$

**Définition 8.5.1.** On dit que $v \in V$ est une solution faible de (8.5.1) si

$$\int_0^1 (v'w' + bv'w + cvw)\,dx = \int_0^1 fw\,dx \qquad \text{pour tout } w \in H^1_0(]0,1[).$$

On se ramène à un espace vectoriel en remarquant que tout élément $v \in V$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$v = u_0 + u, \qquad \text{où } u \in H^1_0(]0,1[)$$

et $u_0$ est un élément donné dans $V$, par exemple la fonction affine

$$u_0(x) = (1-x)\alpha + x\beta \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

La formulation variationnelle précédente devient alors : trouver $u \in H^1_0(]0,1[)$ telle que

$$\int_0^1 (u'w' + bu'w + cuw)\,dx = \int_0^1 fw\,dx - \int_0^1 (u_0'w' + bu_0'w + cu_0w)\,dx \qquad \text{pour tout } w \in H^1_0(]0,1[).$$

On sait déjà que l'application $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

$$a(u,w) = \int_0^1 (u'w' + bu'w + cuw)\,dx \quad \text{pour tout } u,w \in H_0^1(]0,1[)$$

est une forme bilinéaire continue et coercive. Par ailleurs, on vérifie par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la forme linéaire $L : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(w) := \int_0^1 fw\,dx - \int_0^1 (u_0'w' + bu_0'w + cu_0w)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(]0,1[)$$

est continue. Le Théorème de Lax-Milgram permet alors de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution faible. On montre enfin que $u \in H^2(]0,1[)$ est en fait une solution forte et que, si de plus $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution classique.

## 8.6 Conditions aux limites de Neumann

Soient $b \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $c \in \mathcal{C}([0,1])$, $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^([0,1])$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in [0,1], \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta. \end{cases} \tag{8.6.1}$$

On a alors

**Proposition 8.6.1.** *La fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est solution de (8.6.1) si et seulement si*

$$\int_0^1 (u'\varphi' + bu'\varphi + cu\varphi)\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx + \beta\varphi(1) - \alpha\varphi(0) \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,1]). \tag{8.6.2}$$

**Remarque 8.6.2.** Ici l'espace des fonctions test est $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ alors que pour le problème de Dirichlet on prenait $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$.

*Démonstration.* Si $u$ est solution de (8.6.1), on multiplie l'équation par $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ puis on intègre sur $]0,1[$. Après une intégration par parties, on obtient bien la formule (8.6.2).

Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ satisfait (8.2.1), on commence par prendre des fonctions test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$. Après intégration par parties, il vient que

$$\int_0^1 (-u'' + bu' + cu - f)\varphi\,dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[),$$

ce qui implique que $-u'' + cu - f = 0$ presque partout sur $]0,1[$ d'après le Corollaire 3.3.10. Du fait que $-u'' + bu' + cu - f$ est continue sur $[0,1]$, on obtient en fait que $-u'' + bu' + cu - f = 0$ partout sur $[0,1]$, ce qui montre bien que $u$ est solution de (8.1.1). Montrons maintenant que les conditions limites sont réalisées. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, on multiplie l'équation $-u'' + bu' + cu = f$ par $\varphi$ puis on intègre par parties sur $]0,1[$. Il vient

$$0 = \int_0^1 (-u'' + bu' + cu - f)\varphi\,dx = \int_0^1 (u'\varphi' + bu'\varphi + cu\varphi - f\varphi)\,dx - u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0).$$

En utilisant (8.6.2), il vient pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$,

$$(u'(1) - \beta)\varphi(1) = (u'(0) - \alpha)\varphi(0).$$

An choisissant en particulier $\varphi(x) = x$, il vient $u'(1) = \beta$ puis $\varphi(x) = 1 - x$, on obtient que $u'(0) = \alpha$. $\square$

Le résultat précédent et la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ dans $H^1(]0,1[)$ nous conduit à la notion suivante de solution faible.

**Définition 8.6.3.** On dira que $u \in H^1(]0,1[)$ est solution faible de (8.6.1) si

$$\int_0^1 (u'v' + bu'v + cuv)\,dx = \int_0^1 fv\,dx + \beta v(1) - \alpha v(0) \quad \text{pour tout } v \in H^1(]0,1[). \tag{8.6.3}$$

**Remarque 8.6.4.** Les conditions aux limites de Neumann sont directement prises en compte dans la formulation variationnelle (8.6.3). *A priori*, ces conditions aux limites n'ont pas de sens pour une fonction $u \in H^1(]0,1[)$.

**Théorème 8.6.5.** *Soient $b \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $c \in \mathcal{C}([0,1])$, $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Supposons de plus qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $c - \frac{1}{2}b' \geq c_0$. Alors il existe une unique solution faible $u \in H^1(]0,1[)$ de (8.6.1). De plus, $u \in H^2(]0,1[)$ et si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$.*

*Démonstration.* On sait déjà que l'application $a : H^1(]0,1[) \times H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

$$a(u,w) = \int_0^1 (u'w' + bu'w + cuw)\,dx \quad \text{pour tout } u,w \in H^1(]0,1[)$$

est une forme bilinéaire continue et coercive. On définit la forme linéaire $L : H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ par

$$L(v) := \int_0^1 fv\,dx + \beta v(1) - \alpha v(0) \quad \text{pour tout } v \in H^1(]0,1[).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Théorème 7.2.1, on en déduit que pour tout $v \in H^1(]0,1[)$,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|u\|_{L^2(]0,1[)} + (|\alpha| + |\beta|)\|u\|_{L^\infty(]0,1[)} \leq C\|u\|_{H^1(]0,1[)},$$

ce qui montre que $L$ est continue. Le Théorème de Lax-Milgram permet alors de conclure à l'existence et l'unicité d'une solution faible.

En particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, on a

$$\int_0^1 u'\varphi'\,dx = \int_0^1 (f - bu' + cu)\varphi\,dx$$

ce qui montre, du fait que $f - bu' + cu \in L^2([0,1])$, que $u \in H^2(]0,1[)$. On en déduit alors que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ de sorte que $-u'' + bu' + cu = f$ p.p. sur $[0,1]$, $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = \beta$ ce qui montre que $u$ est une solution forte.

Enfin si $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $u'' = f - bu' - cu \in \mathcal{C}([0,1])$ ce qui implique que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et que $-u'' + bu' + cu = f$ partour. sur $[0,1]$. On en déduit dans ce cas que $u$ est une solution classique. $\square$

# Chapitre 9

# Conditions d'optimalité d'ordre un

## 9.1 Différentielle au sens de Gâteaux

### 9.1.1 Définition et exemples

**Définition 9.1.1.** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés, $U$ un ouvert $E$ et $J : U \to F$ une fonctionnelle. On dit que $J$ est Gâteaux-differentiable en $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $v \in E$,

$$\frac{J(x+tv) - J(x)}{t} \to Av \quad \text{dans } F \text{ quand } t \to 0.$$

On vérifie aisément que si une telle application $A$ existe, alors elle est unique. On note alors $A = d_G J(x)$.

Une autre façon d'exprimer la notion de différentielle au sens de Gâteaux est de considérer la restriction de $J$ à la droite affine passant par $x$ et de vecteur directeur $v$. Pour précisément, on considère la fonction $h : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to \mathbb{R}$, où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit pour que $x + tv \in U$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , définie par

$$h(t) = J(x + tv).$$

On a alors

$$d_G J(x) = h'(0).$$

**Remarque 9.1.2.**
1. Si $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notion de Gâteaux-différentielle et de dérivée coïncident et $d_G J(x) = J'(x)$.
2. Si $J \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire continue, alors $d_G J(x)v = J(v)$ pour tout $x$ et $v \in E$ car $J(x + tv) - J(x) = tJ(v)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Les formes quadratiques continues sont Gâteaux-différentiables. Si, pour tout $x \in E$, $Q(x) = a(x, x)$ où $a : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue, alors $d_G Q(x)v = a(x, v) + a(v, x)$ pour tout $x$, $v \in E$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $J(x + tv) - J(x) = a(x, x) + ta(x, v) + ta(v, x) + t^2 a(v, v)$, d'où

$$\frac{J(x+tv) - J(x)}{t} \to a(x, v) + a(v, x).$$

4. En particulier, si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert, $d_G \| \cdot \|^2(x)v = 2\langle x, v\rangle$ pour tout $x$, $v \in H$.

5. La fonction norme n'est jamais Gâteaux-différentiable en zéro car $\|0 + tv\| = |t|\|v\|$ et la fonction $t \mapsto |t|$ n'est pas dérivable en 0.

Donnons à présent quelques exemples de fonctionnelles Gâteaux-différentiables dans les espaces de fonctions continues et de Lebesgue.

**Proposition 9.1.3.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On définit la fonctionnelle $J : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ par $J(u) = f \circ u$ pour tout $u \in \mathcal{C}(I)$, i.e., $J(u)(x) = f(u(x))$ pour tout $x \in I$. Alors $J$ est Gâteaux-différentiable sur $\mathcal{C}(I)$ et $d_G J(u)v = f'(u)v$ pour tout $u$, $v \in \mathcal{C}(I)$.*

*Démonstration.* Notons que $J$ est bien définie puisque $f \circ u$ est continue sur $I$ comme composée de fonctions continues. On écrit, pour tout $u$, $v \in \mathcal{C}(I)$ et $x \in I$,

$$f(u(x) + tv(x)) - f(u(x)) = \int_{u(x)}^{u(x)+tv(x)} f'(s)\, ds = tf'(u(x))v(x) + \int_{u(x)}^{u(x)+tv(x)} [f'(s) - f'(u(x)]\, ds.$$

Comme les fonctions $u$ et $v$ sont continues sur le compact $I$, elles sont bornées. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que $|u(x)| \leq M$ et $|v(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$, et donc $|u(x) + tv(x)| \leq 2M$ pour tout $|t| \leq 1$ et $x \in I$. Par ailleurs, $f'$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc uniformément continue sur $[-2M, 2M]$. En particulier,

$$\theta(t) := \sup_{y,z \in [-2M,2M], |y-z| \leq tM} |f'(y) - f'(z)| \to 0, \qquad \text{quand } t \to 0.$$

Il vient donc, pour tout $x \in I$,

$$\left| \frac{f(u(x) + tv(x)) - f(u(x))}{t} - f'(u(x))v(x) \right| \leq M\theta(t),$$

puis

$$\sup_{x \in I} \left| \frac{f(u(x) + tv(x)) - f(u(x))}{t} - f'(u(x))v(x) \right| \leq M\theta(t) \to 0,$$

ce qui montre que $\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \to f'(u)v$ dans $\mathcal{C}(I)$. □

Dans un esprit similaire, considérons un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$|f'(t)| \leq C_1(|t|^{p-1} + 1), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \tag{9.1.1}$$

où $C_1 > 0$. Remarquons que, par intégration, on a alors

$$|f(t)| \leq C_2(|t|^p + 1), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \tag{9.1.2}$$

où $C_2 > 0$.

**Proposition 9.1.4.** *Supposons $E$ borné. Soit $J : L^p(E) \to L^1(E)$ la fonctionnelle définie par $J(u) = f \circ u$ pour tout $u \in L^p(E)$ où $f$ satisfait (9.1.1). Alors $J$ est Gâteaux-différentiable sur $L^p(E)$ et $d_G J(u)v = f'(u)v$ pour tout $u$, $v \in L^p(E)$.*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que si $u \in L^p(E)$, alors $f \circ u$ est mesurable comme composée d'une fonction continue et d'une fonction mesurable. Par ailleurs, d'après (9.1.2),

$$\int_E |f(u(x))|\, dx \leq C_2 \int_E |u|^p\, dx + C_2\lambda(E) < +\infty$$

puisque que $E$ est borné. Ceci montre que $J$ est bien définie de $L^p(E)$ dans $L^1(E)$. Si $u$ et $v \in L^p(E)$, d'après le théorème des accroissements finis, pour presque tout $x \in E$ et tout $t \in ]0,1[$, il existe un $\theta_{x,t} \in ]0,1[$ tel que

$$\frac{f(u(x)+tv(x))-f(u(x))}{t} = f'(u(x)+\theta_{x,t}tv(x))v(x).$$

On a tout d'abord que pour presque tout $x \in I$,

$$f'(u(x)+\theta_{x,t}tv(x))v(x) \to f'(u(x))v(x) \quad \text{quand } t \to 0.$$

Par ailleurs, l'hypothèse (9.1.1) montre que

$$|f'(u(x)+\theta_{x,t}tv(x))| \le C_1 + C_1|u(x)+\theta_{x,t}tv(x)|^{p-1} \le C_1 + C_1'(|u(x)|^{p-1}+|v(x)|^{p-1}),$$

où l'on a utilisé l'inégalité $|a+b|^{p-1} \le C_p(|a|^{p-1}+|b|^{p-1})$ pour tout $a$, $b \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, l'inégalité de Young montre que

$$|u(x)|^{p-1}v(x)| \ \le \frac{|v(x)|^p}{p} + \frac{|u(x)|^p}{p'},$$

où $1/p + 1/p' = 1$, ce qui implique que pour presque tout $x \in I$,

$$|f'(u(x)+\theta_{x,t}tv(x))v(x)| \ \le C(|u(x)|^p + |v(x)|^p + 1).$$

Or la fonction dans le membre de droite est dans $L^1(E)$ puisque $u$ et $v \in L^p(E)$ et $E$ est borné. On est alors en mesure d'appliquer le théorème de convergence dominée qui assure que $\frac{f(u+tv)-f(u)}{t} \to f'(u)v$ dans $L^1(E)$. $\square$

**Corollaire 9.1.5.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*

*i) La fonctionnelle $F : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(u) = \int_I f(u(x))\, dx, \qquad \textit{pour tout } u \in \mathcal{C}(I) \tag{9.1.3}$$

*est une fonctionnelle Gâteaux-différentiable sur $\mathcal{C}(I)$. De plus*

$$d_G F(u) = \int_I f'(u(x))v(x)\, dx \qquad \textit{pour tout } u, v \in \mathcal{C}(I).$$

*ii) Si $f$ vérifie de plus (9.1.1), alors $F$ définie par (9.1.3) est une fonctionelle bien définie sur $L^p(I)$, Gâteaux-différentiable et*

$$d_G F(u) = \int_I f'(u(x))v(x)\, dx \qquad \textit{pour tout } u, v \in L^p(I).$$

*Démonstration.* Notons $(E,F) = (\mathcal{C}(I), \mathcal{C}(I))$ ou $(E,F) = (L^p(I), L^1(I))$. On a déja vu que $J : E \to F$ définie par $J(u) = f \circ u$ est bien définie et Gâteaux-différentiable avec

$$d_G J(u)v = f'(u)v, \qquad \text{pour tout } u, v \in E.$$

De plus les fonctions $f \circ u$ et $(f' \circ u)v$ sont intégrables sur $I$ pour tout $u$, $v \in E$. Notons $L : F \to \mathbb{R}$ l'application linéaire continue définie par $L(h) = \int_I h\, dx$ pour tout $h \in F$ de sorte que $F = L \circ J$. Comme $\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \to f'(u)v$ dans $F$ quand $t \to 0$ et $L$ est linéaire continue, il vient que

$$\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = L\left(\frac{J(u+tv)-J(u)}{t}\right) \xrightarrow[t\ \to 0]{} L(f'(u)v) = \int_I f'(u(x))v(x)\, dx,$$

ce qui montre le résultat annoncé. $\square$

### 9.1.2 Condition d'optimalité en un point intérieur

Une application de la différentielle au sens de Gâteaux aux problèmes de minimisation concerne la condition nécessaire pour la minimalité en un point d'un ouvert.

**Théorème 9.1.6.** *Soient $E$ un espace vectoriel normé, $U$ un ouvert de $E$ et $J : U \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Si $x_0 \in U$ est tel que*

$$J(x_0 \leq J(x), \quad \textit{pour tout } x \in U$$

*et $J$ est Gâteaux-différentiable en $x_0$, alors*

$$d_G J(x_0) = 0, \tag{9.1.4}$$

*autrement dit $x_0$ est un point critique de $J$.*

*Démonstration.* Comme $U$ est ouvert, pour tout $x \in U$ et $v \in E$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 + tv \in U$ pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$. En particulier, si $x_0$ est un point de minimum,

$$J(x_0) \leq J(x_0 + tv), \quad \text{pour tout } t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Il en résulte que si $t \in ]0, \varepsilon[$,

$$\frac{J(x_0) - J(x_0 + tv)}{t} \geq 0,$$

alors que si $t \in ]-\varepsilon, 0[$,

$$\frac{J(x_0) - J(x_0 + tv)}{t} \leq 0.$$

Comme $J$ est Gâteaux-différentiable en $x_0$, il vient par passage à la limite quand $t \to 0$ dans les deux inégalités précédentes que $d_G J(x_0) = 0$. □

La condition (9.1.4) est appelée condition d'optimalité d'ordre 1. Cette condition est nécessaire mais nullement suffisante en général car un point critique peut être aussi bien un minimum local, qu'un maximum local ou même un point selle.

### 9.1.3 Gâteaux-différentielle et fonctions convexes

La convexité des fonctionnelles Gâteaux-différentiables peut être caractérisée à l'ordre un.

**Proposition 9.1.7.** *Soient $E$ un espace vectoriel normé et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteaux-différentiable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*i) $J$ est convexe ;*

*ii) Pour tout $x$, $y \in E$,*

$$J(y) \geq J(x) + \langle d_G J(x), y - x \rangle;$$

*iii) (Monotonie de la Gâteaux-différentielle) Pour tout $x$, $y \in E$,*

$$\langle d_G J(x) - d_F J(y), x - y \rangle \geq 0.$$

*Démonstration.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)* : Soient $t \in ]0, 1[$ et $x$, $y \in E$. Alors par convexité de $J$,

$$J(x + t(y - x)) \leq tJ(y) + (1 - t)J(x),$$

d'où

$$\frac{J(x + t(y - x)) - J(x)}{t} \leq J(y) - J(x).$$

En faisant tendre $t \to 0$, la Gâteaux-différentiabilité de $J$ donne $\langle d_G J(x), y-x\rangle \ \leq J(y) - J(x)$.

*ii)* $\Rightarrow$ *iii)* : Pour tout $x$, $y \in E$,

$$J(y) \geq J(x) + \langle d_G J(x), y-x\rangle,$$
$$J(x) \geq J(y) + \langle d_G J(y), x-y\rangle.$$

En additionnant les deux inégalités, on constate effectivement que $\langle d_G J(x) - d_G J(y), x-y\rangle \geq 0$.

*iii)* $\Rightarrow$ *i)* : Réciproquement, si $x$, $y \in E$ et $t \in [0,1]$, on définit $\varphi(t) = J(x+t(y-x))$. On montre alors que $\varphi$ est dérivable sur $[0,1]$ et que $\varphi'(t) = \langle d_G J(x+t(y-x)), y-x\rangle$. Par conséquent, pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$,

$$\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1) = \langle d_G J(x+t_2(y-x)) - d_G J(x+t_1(y-x)), y-x\rangle$$

et $[x+t_2(x-y)] - [x+t_1(x-y)] = (t_2-t_1)(x-y)$. Donc par hypothèse, il vient que $\varphi'(t_2) \geq \varphi'(t_1)$ autrement dit, $\varphi'$ est croissante. Par conséquent, le théorème des accroissements finis montre l'existence d'un $\theta \in [t_1, t_2]$ tel que

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = (t_2-t_1)\varphi'(\theta) \geq (t_2-t_1)\varphi'(t_1).$$

On définit alors la fonction $g(t) := \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ pour tout $t > 0$. Cette fonction est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $t > 0$,

$$g'(t) = \frac{\varphi'(t)}{t} - \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t^2} \geq 0,$$

ce qui montre que $g(t) \leq g(1)$ si $0 < t \leq 1$. Autrement dit, $\varphi(t) \leq t\varphi(1) + (1-t)\varphi(0)$, soit

$$J(ty + (1-t)x) \leq tJ(y) + (1-t)J(x),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Dans le cas de la minimisation d'une fonction convexe sur un ensemble convexe, on a la condition nécessaire suivante.

**Proposition 9.1.8.** *Soient $E$ un espace vectoriel normé, $C$ un sous-ensemble convexe de $E$ et $J : C \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Soit $x_0 \in C$ tel que*

$$J(x_0) \leq J(x), \qquad \textit{pour tout } x \in C$$

*et $J$ est Gâteaux-différentiable en $x_0$, alors*

$$\langle d_G J(x_0), y-x_0\rangle \ \geq 0, \qquad \textit{pour tout } y \in C.$$

*Démonstration.* Soient $y \in C$ et $t \in ]0,1[$. Alors par convexité de $C$, $x_0+t(y-x_0) = ty+(1-t)x_0 \in C$ et par minimalité de $x_0$, on a $J(x_0) \leq J(x_0+t(y-x_0))$. On en déduit alors que

$$\langle d_G J(x_0), y-x_0\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{J(x_0+t(y-x_0)) - J(x_0)}{t} \ \geq 0,$$

ce qui montre le résultat annoncé. □

### 9.1.4 Condition d'optimalité pour la minimisation sous contrainte égalité linéaire

Soit $E$ un espace vectoriel normé. La minimisation d'une fonctionnelle $J : E \to \mathbb{R}$ sous contrainte de type égalité consiste à minimiser $J$ sur un sous-ensemble de la forme

$$\Gamma = \{x \in E : F_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, p\},$$

où $F_1, \dots, F_p : E \to \mathbb{R}$ sont données. Le cas le plus simple est celui où les contraintes sont linéaires, *i.e.* $F_i(x) = \langle L_i, x\rangle$ pour tout $x \in E$, où $L_i \in E'$ pour tout $i = 1, \dots, p$. Dans ce cas

$$\Gamma = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker} L_i$$

est lui même un sous-espace vectoriel de $E$, donc la théorie développée jusqu'à présent s'applique. Si $x_0 \in \Gamma$ est une solution du problème de minimisation sous contrainte

$$J(x_0) \le J(y), \qquad \text{pour tout } y \in \Gamma,$$

d'après le théorème 9.1.6, la condition d'optimalité du premier ordre s'écrit

$$d_G(J|_\Gamma)(x_0) = 0,$$

ou encore

$$\langle d_G J(x_0), v\rangle = 0, \qquad \text{pour tout } v \in \Gamma.$$

On peut bien entendu supposer que la famille $\{L_1, \dots, L_p\}$ est libre (sinon il suffit d'éliminer des contraintes pour se ramener à cette situation). La condition d'optimalité peut alors s'exprimer de manière différente grâce au résultat suivant.

**Lemme 9.1.9.** *Soient $E$ un espace vectoriel normé, $\{L_1, \dots, L_p\}$ une famille libre dans $E'$ et $L \in E'$. On note $\Gamma = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker} L_i$. Alors $L|_\Gamma = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que*

$$L = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i L_i. \tag{9.1.5}$$

*Démonstration.* Il est clair que si $L$ est de la forme (9.1.5), alors $L$ s'annule sur $\Gamma$. Réciroquement, montrons par récurrence sur $p$ qu'il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_p \in E$ tels que $\langle L_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ pour tout $i$, $j \in \{1, \dots, p\}$.

- Si $p = 1$, l'hypothèse signifie que $\mathrm{Ker} L_1 \subset \mathrm{Ker} L$. Dans le cas $L_1 = 0$, alors $\mathrm{Ker} L_1 = \mathrm{Ker} L = E$ et donc $L = 0$. Sinon, il existe un $e \in E \setminus \mathrm{Ker} L_1$ tel que $L_1(e) = 1$. Par conséquent, $x - L_1(x)e \in \mathrm{Ker} L_1$ et donc, par hypothèse, $x - L_1(x)e \in \mathrm{Ker} L$ soit $L(x) = L(e)L_1(x)$ et le résultat suit.
- Supposons le résultat vrai au rang $p - 1$ pour un certain entier $p \ge 1$. Comme la famille $\{L_1, \dots, L_p\}$ est libre, alors $L_i \ne 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrons que pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\bigcap_{j \ne i} \mathrm{Ker} L_j \not\subset \mathrm{Ker} L_i$. En effet, dans le cas contraire, il existerait un $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\bigcap_{j \ne i_0} \mathrm{Ker} L_j \subset \mathrm{Ker} L_{i_0}$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, des réels $\{\lambda_j\}_{j \ne i_0}$ tels que $L_{i_0} = \sum_{j \ne i_0} \lambda_j L_j$ ce qui impliquerait que la famille $\{L_1, \dots, L_p\}$ est liée et donc aboutirait à une contradiction. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ il existe un $e_i \in \mathrm{Ker} L_j$ pour tout $j \ne i$ tel que $e_i \notin \mathrm{Ker} L_i$. Après renormalisation, on peut supposer que $L_i(e_i) = 1$ et $L_j(e_i) = 0$ pour tout $j \ne i$.

Si $x \in E$, alors $x - \sum_{j=1}^{p} L_j(x) e_j \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker} L_i$ et donc par hypothèse $x - \sum_{j=1}^{p} L_j(x) e_j \in \mathrm{Ker} L$, soit $L(x) = \sum_{j=1}^{p} L_j(x) L(e_j)$. Ceci établit donc le résultat en posant $\lambda_j = L(e_j)$. $\square$

On en déduit une condition nécessaire d'optimalité pour un problème de minimisation sous contraintes égalité linéaires.

**Théorème 9.1.10.** *Soient $E$ un espace vectoriel normé, $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle et $L_1, \ldots, L_p \in E'$ tels que la famille $\{L_1, \ldots, L_p\}$ est libre. On note $\Gamma = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker} L_i$ et on suppose qu'il existe un $x_0 \in \Gamma$ tel que*

$$J(x_0) \leq J(y), \qquad \textit{pour tout } y \in \Gamma$$

*et $J$ est Gâteaux-différentiable en $x_0$. Alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que*

$$d_G J(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i. \tag{9.1.6}$$

Pour exprimer la condition (9.1.6) analogue dans le cas général, la notion de dérivée au sens de Fréchet offre un cadre plus satisfaisant.

## 9.2 Différentielle au sens de Fréchet

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés et $U$ un ouvert de $E$.

**Définition 9.2.1.** On dit que $J : U \to F$ est différentiable au point $x \in U$ (au sens de Fréchet) s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|J(x+h) - J(x) - A(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Lorsqu'une telle application $A$ existe, elle est unique. On l'appelle dérivée au sens de Fréchet, différentielle au sens de Fréchet, ou application linéaire tangente.

**Exemple 9.2.2.**

1. Soit $f$ une fonction d'un intervalle $I$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Si $f$ est dérivable en $x$ (au sens usuel), $f$ est Fréchet-différentiable et $df(x)h = f'(x)h$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.
2. Si $J : U \to Y$ est constante, *i.e.*, $J(x) = c$ pour tout $x \in U$, alors $f$ est différentiable sur $U$ et $dJ(x) = 0$.
3. Si $J \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $J$ est différentiable sur $E$ et $dJ(x)h = J(h)$ pour tout $h \in E$.
4. Les formes quadratiques continues sont différentiables. Soit $a : E \times E \to F$ une forme bilinéaire continue et $Q : E \to F$, définie par $J(x) = a(x, x)$ pour tout $x \in E$. Alors $J$ est différentiable sur $E$ et $dJ(x)h = a(h, x) + a(x, h)$. En particulier, si $a$ est symétrique, $dJ(x)h = 2a(x, h)$. En effet, en développant, $J(x + h) = a(x + h, x + h) = a(x, x) + a(x, h) + a(h, x) + a(h, h)$. Or $A : h \mapsto a(x, h) + a(h, x)$ est linéaire continue et $a(h, h) = o(\|h\|_E)$ ce qui montre que $J(x + h) - J(x) = A(h) + o(\|h\|_E)$ et donc que $dJ(x)h = a(x, h) + a(h, x)$.

**Lemme 9.2.3.** *Si $J : U \to F$ est différentiable en $x \in U$. Alors $J$ est continue en $x$.*

*Démonstration.* On a pour tout $h \in E$ tel que $x + h \in U$,

$$J(x + h) - J(x) = dJ(x)h + o(\|h\|_F) \to 0$$

car $dJ(x)$ est continue de $E$ dans $F$. □

**Remarque 9.2.4.** Notons que cette propriété n'est pas vraie, en général, pour la différentielle au sens de Gâteaux. Pour s'en convaincre on peut considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

qui est Gâteaux-différentiable en $(0,0)$ (car $f(tx,ty)/t \to 0$) mais pas continue en ce même point (car $f(x,x^2) = 1/2$).

**Lemme 9.2.5.** *Soient $J_1$, $J_2 : U \to F$. Si $J_1$ et $J_2$ sont différentiables, alors $\lambda J_1 + \mu J_2$ l'est aussi pour tout $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ et*

$$d(\lambda J_1 + \mu J_2)(x) = \lambda dJ_1(x) + \mu dJ_2(x).$$

*En particulier l'ensemble des fonctions définies de $U$ vers $F$ différentiables en $x$ forme un espace vectoriel.*

Le résultat suivant est une règle de différentiation des fonctions composées. En pratique il est très utile car il permet de réduire le calcul de la différentielle d'une fonction en la décomposant comme la composée de deux fonctions ou plus.

**Proposition 9.2.6.** *Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces vectoriels normés, $U$ un ouvert de $E$ et $V$ un ouvert de $F$, $J_1 : U \to F$ et $J_2 : V \to G$. Soit $x \in U$ tel que $J_1$ est différentiable en $x$, $J_1(x) \in V$ et $J_2$ est différentiable en $J_1(x)$. Alors, $J_2 \circ J_1$ est différentiable en $x$ et on a*

$$d(J_2 \circ J_1)(x) = dJ_2(J_1(x)) \circ dJ_1(x) \in \mathcal{L}(E,G).$$

*Démonstration.* Par définition de $dJ_1(x)$ et $dJ_2(J_1(x))$, on a

$$J_1(x+h) = J_1(x) + dJ_1(x)h + \|h\|_E \varepsilon_1(\|h\|_E), \tag{9.2.1}$$

$$J_2(J_1(x)+k) = J_2(J_1(x)) + dJ_2(J_1(x))k + \|k\|_F \|\varepsilon_2(\|k\|_F), \tag{9.2.2}$$

où $h \in E$ est tel que $x + h \in U$, $k \in V$ est tel que $J_1(x) + k \in V$ et les fonctions $\varepsilon_1(t) \to 0$ et $\varepsilon_2(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Utilisons (9.2.2) avec $k_h = J_1(x+h) - f(x)$ où $h$ est assez petit pour que $J_1(x) + k_h = J_1(x+h) \in V$. Par (9.2.1), on voit qu'il existe $\delta > 0$ et $c > 0$ tels que si $\|h\|_E \leq \delta$, alors $\|k_h\|_F \leq c\|h\|_E$. Il vient alors, en reportant dans (9.2.2), que

$$\begin{aligned} J_2(J_1(x+h)) &= J_2(J_1(x)) + dJ_2(J_1(x))k_h + o(\|k_h\|_F) \\ &= J_2(J_1(x)) + dJ_2(J_1(x))[dJ_1(x)h + o(\|h\|_E)] + o(\|k_h\|_F) \\ &= J_2(J_1(x)) + dJ_2(J_1(x))[dJ_1(x)h] + o(\|h\|_E) \\ &= J_2(J_1(x)) + [dJ_2(J_1(x)) \circ dJ_1(x)]h + o(\|h\|_E), \end{aligned}$$

et la conclusion en découle. □

Jusqu'à présent, nous avons introduit deux notions de différentiabilité : celle de Fréchet et celle de Gâteaux. Remarquons immédiatement que celle de Fréchet est plus forte que celle de Gâteaux.

**Proposition 9.2.7.** *Soit $U$ un ouvert de $E$, $J : U \to F$. Si $J$ est Fréchet-différentiable en $x \in U$, alors $J$ est Gâteaux-différentiable en $x$ et $d_G J(x) = dJ(x)$.*

*Démonstration.* Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $x + tv \in U$. Alors on a $J(x+tv) = J(x) + tdJ(x)v + o(t\|v\|_E)$ de sorte que

$$\frac{J(x+tv) - J(x)}{t} = dJ(x)v + \frac{o(t\|v\|_E)}{t} \to dJ(x)v,$$

ce qui montre que $f$ est Gâteaux-différentiable en $x$ et que $d_G J(x) = dJ(x)$. □

Si la différentielle au sens de Fréchet entraîne celle au sens de Gâteaux, la réciproque est fausse en général, même en dimension finie (voir la remarque 9.2.4). En revanche, nous allons voir que les notions d'applications $\mathcal{C}^1$ sont les mêmes, au sens de Gâteaux et de Fréchet.

**Théorème 9.2.8.** *Soit $J : U \to F$ où $U$ est un ouvert de $E$. On suppose que $J$ est Gâteaux-différentiable sur $U$ et que $y \mapsto d_G J(y)$ de $U$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ est continue en $x \in U$. Alors $J$ est Fréchet-différentiable en $x$ et $dJ(x) = d_G J(x)$.*

*Démonstration.* Soit $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$ et $h \in E$ tel que $\|h\|_E < r$. On introduit la fonction $\Phi : [0,1] \to F$ definie par

$$\Phi(t) = J(x+th) - J(x) - t d_G J(x)h, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Comme par hypothèse $J$ est Gâteaux-différentiable sur $U$, on en déduit que $d_G J(x+th)$ existe pour tout $t \in [0,1]$. On vérifie alors que $\Phi$ est dérivable sur $[0,1]$ et que

$$\Phi'(t) = d_G J(x+th)h - d_G J(x)h$$

et donc

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,1]} \|\Phi'(t)\|_F &\le \|h\|_E \sup_{t\in[0,1]} \|d_G J(x+th) - d_G J(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \\ &\le \|h\|_E \sup_{y\in B(x,r)} \|d_G J(y) - d_G J(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)}. \end{aligned}$$

On a donc par intégration (vectorielle) que $J(x+h) - J(x) - d_G J(x)h = \Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \Phi'(t)\,dt$, et donc

$$\|J(x+h) - J(x) - d_G J(x)h\|_F \le \int_0^1 \|\Phi'(t)\|_F\,dt \le \|h\|_E \sup_{y\in B(x,r)} \|d_G J(y) - d_G J(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Par continuité de $d_G J$ en $x$, on a $\sup_{y\in B(x,r)} \|d_G J(y) - d_G J(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$ quand $r \to 0$, ce qui montre que

$$\frac{\|J(x+h) - J(x) - d_G J(x)h\|_F}{\|h\|_E} \to 0.$$

On en déduit que $J$ est effectivement Fréchet-différentiable en $x$ avec $dJ(x) = d_G J(x)$. □

En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux que celle au sens de Fréchet. Si on désire montrer qu'une fonction $J$ est Fréchet différentiable en un point $x$, on peut montrer d'abord que $J$ est Gâteaux-différentiable dans un voisinage de $x$, puis montrer que l'application $y \mapsto d_G J(y)$ est continue en $x$.

**Proposition 9.2.9.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On définit la fonctionnelle $J : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ par $J(u) = f \circ u$ pour tout $u \in \mathcal{C}(I)$. Alors $J$ est Fréchet-différentiable sur $\mathcal{C}(I)$ et $dJ(u)v = f'(u)v$ pour tout $u$, $v \in \mathcal{C}(I)$.*

*Démonstration.* Nous avons déjà vu à la proposition 9.1.3 que $J$ est Gâteaux-différentiable sur $\mathcal{C}(I)$ et que $d_G J(u)v = f'(u)v$ pour tout $u$, $v \in \mathcal{C}(I)$. D'après le théorème 9.2.8, il suffit de montrer que $d_G J$ est continue de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}(I), \mathcal{C}(I))$. Si $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}(I)$, alors en particulier $u_n(x) \to u(x)$ pour tout $x \in I$ et, $f'$ étant continue, on a que

$$f'(u_n(x)) \to f'(u(x)) \quad \text{pour tout } x \in I. \tag{9.2.3}$$

Montrons que $f'(u_n) \to f'(u)$ uniformément sur $I$. Nous allons pour cela appliquer le théorème d'Ascoli. Comme $u_n \to u$ uniformément sur $I$, alors il existe une constante $M > 0$ telle que $\sup_n \|u_n\|_\infty \leq M$. Comme $f'$ est continue, elle est en particulier uniformément continue sur le compact $[-M, M]$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout $s$, $t \in [-M, M]$,

$$|s - t| \leq \delta \Longrightarrow |f'(s) - f'(t)| \leq \varepsilon.$$

Une nouvelle application du théorème d'Ascoli montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équi-continue. En particulier, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que si $x$, $y \in I$, alors

$$|x - y| \leq \eta \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n(x) - u_n(y)| \leq \delta.$$

Par conséquent, pour tout $x$ et $y \in I$ tels que $|x - y| \leq \eta$, alors

$$|f'(u_n(x)) - f'(v_n(x))| \leq \varepsilon$$

uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que la suite $(f'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équi-continue. Le théorème d'Ascoli montre alors l'existence d'une sous-suite qui converge uniformément sur $I$ et donc en particulier, également simplement. D'après (9.2.3), par unicité de la limite simple, celle-ci ne peut être que $f'(u)$. Comme la limite est indépendante de la sous-suite, on en déduit que toute la suite $f'(u_n)$ converge uniformément vers $f'(u)$ sur $I$. Par conséquent

$$\|(d_G(u_n) - d_G(u))v\|_\infty \leq \|f'(u_n) - f'(u)\|_\infty \|v\|_\infty,$$

d'où, en divisant par $\|v\|_\infty$ puis en passant au sup parmi tous les $v \in \mathcal{C}(I)$,

$$\|d_G(u_n) - d_F(u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(I),\mathcal{C}(I))} \leq \|f'(u_n) - f'(u)\|_\infty \to 0,$$

ce qui montre que $d_G(u_n) \to d_G(u)$. □

**Proposition 9.2.10.** *Supposons $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable borné et $1 \leq p < \infty$. Soit $J : L^p(E) \to L^1(E)$ la fonctionnelle définie par $J(u) = f \circ u$ pour tout $u \in L^p(E)$ où $f$ satisfait (9.1.1). Alors $J$ est Fréchet-différentiable sur $L^p(E)$ et $dJ(u)v = f'(u)v$ pour tout $u$, $v \in L^p(E)$.*

*Démonstration.* Nous avons déjà vu à la proposition 9.1.4 que $J$ est Gâteaux-différentiable sur $L^p(E)$ et que $d_G J(u)v = f'(u)v$ pour tout $u$, $v \in L^p(E)$. D'après le théorème 9.2.8, il suffit de montrer que $d_G J$ est continue de $L^p(E)$ dans $\mathcal{L}(L^p(E), L^1(E))$. Si $u_n \to u$ dans $L^p(E)$, alors d'après le corollaire 3.2.3, il existe une sous-suite (toujours notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et une fonction $g \in L^p(E)$ telles que $u_n \to u$ et $|u_n| \leq g$ p.p. sur $E$. La fonction $f'$ étant continue, on en déduit que $f'(u_n) \to f'(u)$ p.p. sur $E$ et, en vertu le l'hypothèse de croissante (9.1.1) sur $f'$, on a $|f'(u_n)| \leq C_1(g^{p-1} + 1) \in L^{p'}(E)$, où $1/p + 1/p' = 1$. D'après le théorème de convergence dominée, il vient que $f'(u_n) \to f'(u)$ dans $L^{p'}(E)$ et donc d'après l'inégalité de Hölder,

$$\|d_G J(u_n)v - d_G J(u)v\|_1 \leq \|v\|_p \|f'(u_n) - f'(u)\|_{p'}, \quad \text{pour tout } v \in L^p(E).$$

En divisant par $\|v\|_p$ puis en passant au sup par rapport à $v$, on en déduit que

$$\|d_G J(u_n) - d_G J(u)\|_{\mathcal{L}(L^p(E),L^1(E))} \leq \|f'(u_n) - f'(u)\|_{p'} \to 0,$$

ce qui montre bien que $d_G J$ est continue. □

**Corollaire 9.2.11.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*

*i) La fonctionnelle $F : \mathcal{C}(I) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(u) = \int_I f(u(x))\,dx, \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}(I) \tag{9.2.4}$$

*est une fonctionnelle Fréchet-différentiable sur $\mathcal{C}(I)$. De plus*

$$dF(u)v = \int_I f'(u(x))v(x)\,dx \qquad \text{pour tout } u, v \in \mathcal{C}(I).$$

*ii) Si $f$ vérifie de plus (9.1.1), alors $F$ définie par (9.2.4) est une fonctionelle bien définie sur $L^p(I)$, Fréchet-différentiable et*

$$dF(u)v = \int_I f'(u(x))v(x)\,dx \qquad \text{pour tout } u, v \in L^p(I).$$

*Démonstration.* Tout comme dans la preuve de la proposition 9.1.5, on note $(E, F) = (\mathcal{C}(I), \mathcal{C}(I))$ ou $(E, F) = (L^p(I), L^1(I))$. On a déja vu dans les propositions précédentes que $J : E \to F$ définie par $J(u) = f \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$dJ(u)v = f'(u)v, \qquad \text{pour tout } u, v \in E.$$

Notons $L : F \to \mathbb{R}$ l'application linéaire continue définie par $L(h) = \int_I h\,dx$ pour tout $h \in F$. La fonctionnelle $L$ est donc également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $F$. D'après la proposition 9.2.6, on en déduit que $F = L \circ J$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$dF(u)v = L(dJ(u)v) = \int_I f'(u(x))v(x)\,dx,$$

ce qui montre le résultat annoncé. □

## 9.3 Contrainte égalité

On s'intéresse tout d'abord aux contraintes de type égalité. Le résultat suivant étend le théorème 9.1.10 au cas d'une seule contrainte générale.

**Théorème 9.3.1.** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $J$ et $F : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\Gamma = \{y \in E : F(y) = 0\}$ et on suppose que $x_0 \in \Gamma$ satisfait*

$$J(x_0) \leq J(y) \qquad \text{pour tout } y \in \Gamma$$

*et $dF(x_0) \neq 0$. Alors il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$dJ(x_0) = \lambda dF(x_0).$$

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que

$$\operatorname{Ker} dF(x_0) \subset \operatorname{Ker} dJ(x_0), \tag{9.3.1}$$

et la conclusion viendra du lemme 9.1.9 (avec $p = 1$). On commence par écrire un développement limité de $F$ au voisinage de $x_0$ à l'ordre 1 : pour tout $v \in E$, $F(x_0+v) = F(x_0)+\langle dF(x_0), v\rangle+R(v)$ où $R(v) = o(\|v\|)$. En particulier, en posant $\mu(r) := \sup_{\|v\|\leq r} |R(v)|$, on constate que $\mu(r)/r \to 0$ quand $r \to 0$.

Soit $w \in \operatorname{Ker} dF(x_0)$. Si $w = 0$, alors $w \in \operatorname{Ker} dJ(x_0)$. On peut donc supposer que $w \neq 0$. Comme, par ailleurs, $dF(x_0) \neq 0$, il existe aussi un $e \in E$ tel que $\langle dF(x_0), e\rangle = 1$.

**Etape 1 :** Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < t \leq \delta$, on peut trouver $s(t) \in [-t, t]$ avec

$$F(x_0 + tw + s(t)e) = 0, \tag{9.3.2}$$

$$\frac{s(t)}{t} \to 0 \quad \text{quand } t \to 0. \tag{9.3.3}$$

En effet, remarquons tout d'abord que pour tout couple $(s, t)$ avec $|s| \leq t$, on a

$$F(x_0 + tw + se) = F(x_0) + t\langle dF(x_0), w\rangle + s\langle dF(x_0), e\rangle + R(tw + se) = s + R(tw + se),$$

avec $|R(tw + se)| \leq \mu(t\|w\| + |s|\|e\|) \leq \mu(t(\|w\| + \|e\|)) \leq \mu(at)$ où $a = \|w\| + \|e\|$. Soit $\delta > 0$ tel que si $t \leq \delta$, alors $\mu(at)/t \leq 1/2$. On en déduit que pour tout $|s| \leq t \leq \delta$, $|R(tw + se)| \leq t/2$, et donc $F(x_0 + tw + te) = t + R(tw + te) \geq t/2 > 0$ et $F(x_0 + tw - te) = -t + R(tw - te) \leq -t/2 < 0$ ont des signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $s(t) \in [-t, t]$ tel que $F(x + tw + s(t)e) = 0$ et $s(t) + R(tw + s(t)e) = 0$, soit $|s(t)| \leq \mu(at)$.

**Etape 2 :** On a $\langle dJ(x_0), w\rangle = 0$. En effet, comme $x$ est un minimum de $J$ sur $\Gamma$ et que par (9.3.2) $x_0 + tw + s(t)e \in \Gamma$, on peut écrire que pour tout $0 < t \leq \delta$,

$$J(x_0 + tw + s(t)e) - J(x_0) \geq 0.$$

En effectuant un développement limité de $J$ à l'ordre 1, il vient que

$$t\langle dJ(x_0), w\rangle + s(t)\langle dJ(x_0), e\rangle + o(t) \geq 0.$$

En divisant par $t > 0$, puis par passage à la limite quand $t \to 0^+$, on obtient $\langle dJ(x_0), w\rangle \geq 0$. En changeant $w$ en $-w$, on obtient finalement $\langle dF(x_0), w\rangle = 0$. □

## 9.4 Contrainte inégalité

On s'intéresse maintenant à la minimisation sous contrainte de type inégalité. On a alors le résultat fondamental suivant :

**Théorème 9.4.1 (Kuhn-Tucker).** *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif, $J$ et $F : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose de plus que $F$ est convexe et qu'il existe un $\bar{x} \in E$ tel que*
- *$F(\bar{x}) < 0$ ;*
- *ou $F(\bar{x}) = 0$ si $F$ affine.*

*On note $C = \{y \in E : F(y) \leq 0\}$, et on suppose que $x_0 \in C$ satisfait $dF(x_0) \neq 0$ et*

$$J(x_0) \leq J(y) \quad \text{pour tout } y \in C.$$

*Alors, il existe un multliplicateur de Lagrange $\lambda \geq 0$ tel que*

$$dJ(x_0) + \lambda dF(x_0) = 0, \quad \lambda F(x_0) = 0.$$

*Démonstration.* Si $F(x_0) < 0$, alors en notant $U := \{y \in E : F(y) < 0\}$, on en déduit que $J(x_0) \leq J(y)$ pour tout $y \in U$. Comme $U$ est ouvert (car $J$ est Fréchet-différentiable et donc continue par le lemme 9.2), on en déduit d'après le theorème 9.1.6 que $dJ(x_0) = d_G J(x_0) = 0$ ce qui prouve le résultat avec $\lambda = 0$. Supposons maintenant que $F(x_0) = 0$.

**Etape 1 :** *Si $w \in E$ est tel que $\langle dF(x_0), w\rangle_{E',E} \leq 0$, alors $\langle dJ(x_0), w\rangle_{E',E} \geq 0$.* D'après la caractérisation de la convexité au premier ordre (proposition 9.1.7) et d'après les hypothèses faites sur $F$, on a

$$\begin{aligned} 0 > F(\bar{x}) &\geq F(x_0) + \langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E} = \langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E}, \\ 0 = F(\bar{x}) &= F(x_0) + \langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E} = \langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E} \quad \text{si } F \text{ est affine.} \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $t > 0$, définissons $x_\varepsilon := x_0 + \varepsilon(w + t(\bar{x} - x_0))$ et montrons que pour $\varepsilon$ suffisamment petit, $x_\varepsilon \in C$. Par développement de Taylor au premier ordre, on a

$$\begin{aligned} F(x_\varepsilon) &= F(x_0) + \varepsilon\langle dF(x_0), w + t(\bar{x} - x_0)\rangle_{E',E} + o(\varepsilon) \leq \varepsilon t\langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E} + o(\varepsilon), \\ F(x_\varepsilon) &= F(x_0) + \varepsilon\langle dF(x_0), w + t(\bar{x} - x_0)\rangle_{E',E} \leq \varepsilon t\langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E} = 0 \text{ si } F \text{ est affine.} \end{aligned}$$

Dans le premier cas, comme $t\langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E} < 0$, on en déduit que pour $\varepsilon$ assez petit $\varepsilon t\langle dF(x_0), \bar{x} - x_0\rangle_{E',E} + o(\varepsilon) \leq 0$ et donc $F(x_\varepsilon) \leq 0$. Par conséquent, dans les deux cas, on a que $x_\varepsilon \in C$ pour $\varepsilon$ assez petit et donc

$$J(x_0 + \varepsilon(w + t(\bar{x} - x_0))) - J(x_0) \geq 0.$$

Ceci implique, après division par $\varepsilon > 0$ et passage à la limite quand $\varepsilon$ tend vers zéro, que $\langle dJ(x_0), w + t(\bar{x} - x_0)\rangle_{E',E} \geq 0$, puis $\langle dJ(x_0), w\rangle_{E',E} \geq 0$ par passage à la limite quand $t \to 0$.

**Etape 2** : *Il existe $\lambda \geq 0$ tel que $dJ(x_0) + \lambda dF(x_0) = 0$.* Notons $K := \{\lambda dF(x_0), \lambda \geq 0\}$. Montrons que $K$ est un sous-ensemble convexe fermé de $E'$.

- Si $L_1$, $L_2 \in K$ et $t \in [0, 1]$, alors il existe $\lambda_1$ et $\lambda_2 \geq 0$ tels que $L_1 = \lambda_1 dF(x_0)$ et $L_2 = \lambda_2 dF(x_0)$. Par conséquent $tL_1 + (1-t)L_2 = (t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)dF(x_0) \in K$ ce qui montre la convexité de $K$.
- Si $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $K$ telle que $L_n \to L$ dans $E'$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \geq 0$ tel que $L_n = \lambda_n dF(x_0)$. Si $\lambda_n \to +\infty$, comme la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $E'$, on en déduit $dF(x_0) = 0$ ce qui est impossible. Par conséquent la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $[0, +\infty[$ et on peut en extraire une sous-suite $(\lambda_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $\lambda \geq 0$. On en déduit alors que $L = \lambda dF(x_0) \in K$, ce qui montre que $K$ est fermé.

Supposons par l'absurde que $-dJ(x_0) \notin K$. D'après le théorème de Hahn-Banach, seconde forme géométrique (théorème 5.2.7), on peut séparer strictement le convexe compact $\{-dJ(x_0)\}$ du convexe fermé $K$. Il existe donc $T \in E''$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$-\langle T, dJ(x_0)\rangle_{E'',E'} < \alpha < \lambda\langle T, dF(x_0)\rangle_{E'',E'}, \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

Par réflexibilité de $E$, il existe un $x \in E$ tel que

$$-\langle dJ(x_0), x\rangle_{E',E} < \alpha < \lambda\langle dF(x_0), x\rangle_{E',E}, \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

En faisant tendre $\lambda \to +\infty$, on en déduit que $\langle dF(x_0), x\rangle_{E',E} \geq 0$ ce qui implique, d'après l'étape 1, que $\langle dJ(x_0), x\rangle_{E',E} \leq 0$. Par ailleurs, en choisissant $\lambda = 0$, il vient que $\alpha < 0$ et donc que $-\langle dJ(x_0), x\rangle_{E',E} < 0$ ce qui est impossible. On en déduit donc que $-dJ(x_0) \in K$, autrement dit, il existe un $\lambda \geq 0$ tel que $dJ(x_0) + \lambda dF(x_0) = 0$. De plus comme $F(x_0) = 0$, on a toujours $\lambda F(x_0) = 0$. □

# Chapitre 10

# Formulation Lagrangienne

Considérons un Lagrangien $L : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la minimisation de fonctionnelles intégrales du type $J : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \int_0^1 L(x, u(x), u'(x))\, dx \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

## 10.1 Equation différentielles quasi-linéaires

On suppose ici que

$$L(x,s,z) = \frac{1}{2}|z|^2 + G(s),$$

où $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et convexe qui vérifie

$$G(s) \geq -\alpha|s| - \beta \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}, \tag{10.1.1}$$

et $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. On définit la fonctionnelle $J : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2\, dx + \int_0^1 G(u(x))\, dx \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(]0,1[).$$

**Théorème 10.1.1.** *Il existe une unique solution $u \in H_0^1(]0,1[)$ de*

$$\min_{v \in H_0^1(]0,1[)} J(v). \tag{10.1.2}$$

*De plus, $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et, si $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $g := G'$, alors $u$ est caractérisé par*

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = 0 & \textit{pour tout } x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{10.1.3}$$

*Démonstration.* Existence et unicité : L'espace sur lequel on minimise est $H_0^1(]0,1[)$ qui est un espace de Hilbert, donc un espace de Banach réflexif.

Montrons que $J$ est continue. Pour ce faire, on considère un $u \in H_0^1(]0,1[)$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H_0^1(]0,1[)$ telle que $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(]0,1[)$. Par continuité de la norme, on a donc que

$$\int_0^1 |u_n'|^2\, dx \to \int_0^1 |u'|^2\, dx.$$

D'après le Théorème 7.2.1, on a en particulier que $u_n \to u$ fortement dans $L^\infty([0,1])$ et donc également presque partout. Par conséquent, la continuité de $G$ implique que $G(u_n(x)) \to G(u(x))$ pour presque tout $x \in ]0,1[$. Par ailleurs, comme $\|u_n\|_{L^\infty([0,1])} \leq M$ alors

$$|G(u_n(x))| \leq \max_{s\in[-M,M]} G(s)|$$

qui est intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de la convergence dominée donne alors que

$$\int_0^1 G(u_n(x))\,dx \to \int_0^1 G(u(x))\,dx,$$

ce qui montre bien que $J(u_n) \to J(u)$ et donc la continuité de $J$.

Montrons à présent la stricte convexité de $J$. On sait déjà, d'après l'exemple 6.4.10 que

$$u \mapsto \int_0^1 |u'|^2\,dx$$

est strictement convexe. Soient $u$ et $v \in H_0^1(]0,1[)$ et $\lambda \in [0,1]$. Comme $G$ est convexe, alors, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a que $G(\lambda u(x)+(1-\lambda)v(x)) \leq \lambda G(u(x))+(1-\lambda)G(v(x))$. En intégrant, il vient que

$$\int_0^1 G(\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x))\,dx \leq \lambda \int_0^1 G(u(x))\,dx + (1-\lambda)\int_0^1 G(v(x))\,dx.$$

La fonctionnelle $J$ est donc la somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction convexe, elle est donc strictement convexe.

Venons en à la coercivité. Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$, d'après la condition (10.1.1), on a

$$J(u) \geq \int_0^1 |u'|^2\,dx - \alpha\int_0^1 |u|\,dx - \beta.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_0^1 |u|\,dx \leq \|u\|_{L^2([0,1])} \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)},$$

et en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient que

$$J(u) \geq \|u\|^2_{H^1(]0,1[)} - \alpha\|u\|_{H^1(]0,1[)} - \beta.$$

Le polynôme $P(t) := t^2 - \alpha t - \beta \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, par conséquent,

$$J(u) \to +\infty \text{ quand } \|u\|_{H^1(]0,1[)} \to +\infty,$$

ce qui établit la coercivité de $J$.

Nous sommes alors en mesure d'appliquer le Corollaire 6.4.12 qui montre l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H_0^1(]0,1[)$ au problème de minimisation 10.1.2.

Caractérisation : D'après le Corollaire 9.1.5, et du fait que $H_0^1(]0,1[)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}([0,1])$, on en déduit que la fonctionnelle $J$ est Gâteaux-différentiable sur $H_0^1(]0,1[)$ et pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$\langle d_G J(u), v\rangle = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 G'(u)v\,dx = \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 g(u)v\,dx.$$

La condition d'optimalité d'ordre 1 établie au Théorème 9.1.6 montre que pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 g(u)v\,dx = 0.$$

En d'autres temes, $u \in H^2(]0,1[)$ et $u'' = g(u)$. En particulier, $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et comme $g$ est continue, on en déduit que $u'' \in \mathcal{C}([0,1])$ ce qui montre que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et que $u$ est solution classique de l'équation différentielle (10.1.3).

Réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est solution de l'équation (10.1.3). Soit $v \in H_0^1(]0,1[)$, en multipliant l'équation par $v(x) - u(x)$ puis en intégrant par parties sur $[0,1]$, on obtient que

$$\int_0^1 u'(v'-u')\,dx + \int_0^1 g(u)(v-u)\,dx = 0.$$

Comme $u'(v'-u') = \frac{1}{2}|v'|^2 - \frac{1}{2}|u'|^2 - \frac{1}{2}|v'-u'|^2$ p.p. sur $[0,1]$ et, par convexité de $G$ (voir la Proposition 9.1.7), $G(v) \geq G(u) + g(u)(v-u)$ p.p. sur $[0,1]$, on obtient que

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx + \int_0^1 G(v)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2\,dx - \int_0^1 G(u)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 |v'-u'|^2\,dx + \int_0^1 u'(v'-u')\,dx + \int_0^1 g(u)(v-u)\,dx \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $u$ est la solution du problème de minimisation (10.1.2). □

## 10.2 Equations différentielles non linéaires

On suppose dans cette section que

$$L(x,s,z) = F(z) - h(x)s,$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et convexe qui vérifie

$$\alpha|z|^p \leq F(z)| \leq \beta(|z|^p + 1), \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}, \tag{10.2.1}$$

avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 < p < \infty$ et $h \in L^{p'}([0,1])$. On définit la fonctionnelle $J : W_0^{1,p}(]0,1[) \to \mathbb{R}$ par

$$J(u) = \int_0^1 F(u'(x))\,dx - \int_0^1 h(x)u(x)\,dx \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(]0,1[).$$

**Théorème 10.2.1.** *Il existe une solution $u \in W_0^{1,p}(]0,1[)$ de*

$$\min_{v \in W_0^{1,p}(]0,1[)} J(v). \tag{10.2.2}$$

*De plus,*

- *Si $F$ est strictement convexe, alors la solution est unique ;*
- *Si $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f := F'$, alors $u$ est caractérisée par*

$$\int_0^1 f(u'(x))v'(x)\,dx + \int_0^1 h(x)v(x)\,dx = 0 \quad \textit{pour tout } v \in W_0^{1,p}(]0,1[). \tag{10.2.3}$$

*Démonstration.* Existence et unicité : L'espace sur lequel on minimise est $W_0^{1,p}(]0,1[)$ qui est un espace de Banach réflexif car $1 < p < \infty$.

Montrons que $J$ est convexe. Tout d'abord, l'application

$$u \mapsto \int_0^1 hu\,dx$$

est linéaire et donc convexe. Par ailleurs si $u$ et $v \in W_0^{1,p}(]0,1[)$ et $\lambda \in [0,1]$, comme $F$ est convexe, alors, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a que $F(\lambda u'(x)+(1-\lambda)v'(x)) \leq \lambda F(u'(x))+(1-\lambda)F(v'(x))$. En intégrant, il vient que

$$\int_0^1 F(\lambda'(x) + (1-\lambda)v'(x))\,dx \leq \lambda \int_0^1 F(u'(x))\,dx + (1-\lambda)\int_0^1 F(v'(x))\,dx.$$

La fonctionnelle $J$ est donc la somme d'une fonction convexe et d'une application linéaire, elle est donc convexe. Notons que le même argument montre que si $F$ est strictement convexe, alors $J$ l'est également.

Montrons que $J$ est continue. On considère $u \in W_0^{1,p}(]0,1[)$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $W_0^{1,p}(]0,1[)$ telle que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(]0,1[)$. D'après la réciproque du théorème de la convergence dominée, il existe une sous-suite, toujours notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $w \in L^p([0,1])$ telles que $u'_n \to u'$ et $|u'| \leq w$ p.p. sur $[0,1]$. Par continuité de $F$, il vient que $F(u'_n) \to F(u')$ p.p. et d'après (10.2.1), on a $0 \leq F(u'_n) \leq \beta(|w|^p+1) \in L^1([0,1])$. D'après le théorème de la convergence dominée, on obtient alors que

$$\int_0^1 F(u'_n)\,dx \to \int_0^1 F(u')\,dx.$$

Par ailleurs comme $h \in L^{p'}([0,1])$, on a clairement que

$$\int_0^1 hu_n\,dx \to \int_0^1 hu\,dx.$$

Par conséquent, $J(u_n) \to J(u)$ ce qui établit la continuité de $J$.

Venons en à la coercivité. Soit $u \in W_0^{1,p}(]0,1[)$, d'après la condition (10.2.1) et l'inégalité de Hölder, il vient que

$$J(u) \geq \alpha\|u'\|^p_{L^p([0,1])} - \|h\|_{L^{p'}([0,1])}\|u\|_{L^p([0,1])}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$J(u) \geq \|u\|^p_{W^{1,p}(]0,1[)} - C\|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)} \to +\infty \text{ quand } \|u\|_{W^{1,p}(]0,1[)} \to +\infty,$$

ce qui établit la coercivité de $J$.

Nous sommes alors en mesure d'appliquer le Corollaire 6.4.12 qui montre l'existence d'une solution $u \in W_0^{1,p}(]0,1[)$ au problème de minimisation 10.2.2 qui s'avère être unique lorsque $F$ est strictement convexe.

Caractérisation : D'après le Corollaire 9.2.11, on sait que la fonctionnelle

$$J_2 : v \in L^p([0,1]) \mapsto \int_0^1 F(v)\,dx$$

est Fréchet-différentiable sur $L^p([0,1])$, avec

$$\langle dJ_2(v), w\rangle = \int_0^1 F'(v)w\,dx = \int_0^1 f(v)w\,dx.$$

Soit $J_1 : W^{1,p}(]0,1[) \to L^p([0,1])$ définie par $J_1(v) = v'$ pour tout $v \in W^{1,p}(]0,1[)$. Alors $J_2$ est liénaire et donc Fréchet-différentiable et pour tout $v$, $w \in W^{1,p}(]0,1[)$, on a

$$dJ_1(v)(w) = w'.$$

D'après la formule de différentiation des fonctions composées (Proposition 9.2.6), on en déduit que la fonctionnelle intégrale

$$v \in W^{1,p}(]0,1[) \mapsto J_2 \circ J_1(v) = \int_0^1 F(v')\,dx$$

est Fréchet-différentiable et pour tout $v \in W^{1,p}(]0,1[)$, sa différentielle de Fréchet est donnée par

$$w \in W^{1,p}(]0,1[) \mapsto \langle dJ_2(J_1(v)), dJ_2(v)(w)\rangle = \int_0^1 F'(v')w'\,dx = \int_0^1 f(v')w'\,dx.$$

Par conséquent, $J$ est Fréchet-différentiable sur $W^{1,p}(]0,1[)$ et pour tout $v$, $w \in W_0^{1,p}(]0,1[)$,

$$\langle dJ(v), w\rangle = \int_0^1 f(v')w'\,dx - \int_0^1 hw\,dx.$$

La condition d'optimalité d'ordre 1 établie au Théorème 9.1.6 montre que (10.2.3) a bien lieu.

Réciproquement, si $u \in W_0^{1,p}([0,1])$ est solution de (10.2.3), alors pour tout $v \in W_0^{1,p}(]0,1[)$ en choisissant $w = v - u$ comme fonction test, il vient

$$\int_0^1 f(u')(v'-u')\,dx - \int_0^1 h(v-u)\,dx = 0.$$

Par ailleurs, la convexité de $F$ (voir la Proposition 9.1.7) implique que $F(v') \geq F(u') + f(u')(v'-u')$ p.p. sur $[0,1]$. En intégrant sur $[0,1]$ on obtient que

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) = \int_0^1 F(v')\,dx - \int_0^1 hv\,dx - \int_0^1 F(u')\,dx + \int_0^1 hu\,dx \\ = \int_0^1 f(u')(v'-u')\,dx - \int_0^1 h(v-u) = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $u$ est solution du problème de minimisation (10.2.2). □

## 10.3 Minimisation sous contrainte

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$, $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \neq 0$. On considère les fonctionnelles $J$ et $F : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définies par

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx - \int_0^1 u(x)\,dx, \quad F(u) = \int_0^1 f(u(x))\,dx - 1, \quad \text{pour tout} \ \ u \in H_0^1(]0,1[).$$

On note

$$C := \{v \in H_0^1(]0,1[) : F(v) \leq 0\},$$

et on considère le problème de minimisation

$$\inf_{v \in C} J(v). \tag{10.3.1}$$

**Théorème 10.3.1.** *Le problème de minimisation* (10.3.1) *admet une unique solution* $u \in H_0^1(]0,1[)$. *De plus,* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *et vérifie l'équation*

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda f'(u(x)) = 1 & \text{pour tout } x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{10.3.2}$$

*où* $\lambda \geq 0$.

*Démonstration.* Existence et unicité : On remarque d'abord que $J$ est une fonctionnelle continue, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement convexe et coercive sur $H_0^1(]0,1[)$.

L'ensemble $C$ est non vide car la fonction nulle appartient à $C$. Par ailleurs, la convexité de $f$ implique que $C$ est également convexe. Montrons enfin que $C$ est fermé dans $H_0^1(]0,1[)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C$ telle que $u_n \to u$ dans $H_0^1(]0,1[)$. En particulier, d'après le Théorème 7.2.1, il vient que $u_n \to u$ uniformément. Par continuité de $f$, on en déduit que $f(u_n) \to f(u)$ simplement sur $[0,1]$, que $\|u_n\|_{L^\infty([0,1])} \leq M$ et donc que $|f(u_n)| \leq \max_{s\in-[M,M]} |f(s)|$ p.p. sur $[0,1]$. D'après le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$\int_0^1 f(u)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(u_n)\,dx \leq 1,$$

ce qui montre que $u \in C$ et donc que $C$ est fermé.

Le Corollaire 6.4.12 assure donc l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H_0^1(]0,1[)$ au problème de minimisation 10.3.1.

Condition d'optimalité : Remarquons tout d'abord que la valeur minimale $J(u) < 0$. En effet, si $\varepsilon > 0$, alors la fonction $u_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $u_\varepsilon(x) = 2\varepsilon x \chi_{[0,1/2]} + 2\varepsilon(1-x)\chi_{[1/2,1]}$ pour tout $x \in [0,1]$ appartient bien à $H_0^1(]0,1[)$. Par ailleurs comme $u_\varepsilon \to 0$ uniformément sur $[0,1]$, alors par convergence dominée,

$$\int_0^1 f(u_\varepsilon)\,dx \to 0,$$

et, en particulier, $u_\varepsilon \in C$ pour $\varepsilon$ assez petit. Par conséquent, $J(u) \leq J(u_\varepsilon) = 4\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ pour $\varepsilon$ petit.

Les fonctionnelles $J$ et $F$ sont Fréchet-différentiables et l'on a, pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$\langle dJ(u), v\rangle = \int_0^1 u'v'\,dx - \int_0^1 v\,dx, \quad \langle dF(u), v\rangle = \int_0^1 f'(u)v\,dx.$$

Supposons que $dF(u) = 0$, alors pour tout $v \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$,

$$\int_0^1 f'(u)v\,dx = 0$$

ce qui implique, d'après la Proposition 3.3.10, que $f'(u(x)) = 0$ p.p. sur $[0,1]$. Donc, par hypothèse $u(x) = 0$ p.p. sur $[0,1]$ soit $J(u) = 0$, ce qui est impossible puisque $J(u) < 0$. Par conséquent, on a que $dF(u) \neq 0$ et d'après le Théorème de Kuhn-Tucker, il existe un $\lambda \geq 0$ tel que

$$dJ(u) + \lambda dF(u) = 0,$$

ou encore, pour tout $v \in H_0^1(]0,1[)$,

$$\int_0^1 u'v'\,dx + \lambda \int_0^1 f'(u)v\,dx = \int_0^1 v\,dx.$$

On en déduit que $u \in H^2(]0,1[)$ et que $-u'' + \lambda f'(u) = 1$ p.p. sur $[0,1]$. En particulier, $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et comme $f'$ est continue on en déduit que $u'' \in \mathcal{C}([0,1])$ ce qui montre que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et que $-u'' + \lambda f'(u) = 1$ partout sur $[0,1]$. □