Mathématiques Orsay

Université Paris Saclay
Licence de Mathématiques

Analyse, mesure et géométrie

Jean-François Babadjian

Table des matières

Chapitre 1

Construction de mesures

1.1 Quelques éléments de théorie de la mesure

On rappelle les définitions suivantes. Etant donné un ensemble X, on désigne par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.1.1. Une *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur X est une sous famille $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant :
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(iii) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

Définition 1.1.2. Une *mesure* est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ qui satisfait
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

On rappelle les propriétés suivantes des mesures, qui seront utilisées systématiquement par la suite.

Proposition 1.1.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{A}$. Alors*
1.

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n);$$

2. si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n);$$

3. si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mu(A_0) < \infty$,

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Si X est un espace topologique, on désigne par $\mathcal{B}(X)$ la *tribu Borélienne* sur X, *i.e.* la plus petite tribu contenant les ouverts de X. Une mesure définie sur la tribu $\mathcal{B}(X)$ s'appelle une *mesure Borélienne.* Une mesure Borélienne finie sur les compacts s'appelle une *mesure de Radon.*

Les mesures de Radon jouissent de propriétés de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par la mesure d'ouverts ou de fermés.

Proposition 1.1.4. *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$. Alors, pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}^N$*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) : \ K \subset A, \ K \text{ compact}\}, \\ &= \inf\{\mu(U) : \ A \subset U, \ U \text{ ouvert}\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On suppose tout d'abord que $\mu(A) < \infty$ et on pose $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ce qui définit une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$.

On considère la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ := \ & \Big\{B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe} \\ & \quad \text{un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon\Big\}. \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}$ contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fermé $C_n \subset B_n$ tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

L'ensemble $C := \bigcap_n C_n$ est fermé et

$$\nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus C\right) = \nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \le \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon,$$

ce qui montre que $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, comme ν est une mesure finie, on a

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{m} C_n\right)\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \\ &\le \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) \le \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pour m assez grand, on a donc en posant $C' := \bigcup_{n=0}^{m} C_n$

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus C'\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre, C' étant fermé, que $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrons que U est l'union dénombrables de fermés. Pour ce faire, on considère la famille $\mathcal{F}$ des boules fermées $\overline{B}(x,r)$ dans $\mathbb{R}^N$ centrées en $x \in \mathbb{Q}^N$ et de rayon $r \in \mathbb{Q}^+$. La famille $\mathcal{F}$ est dénombrable et U étant ouvert, on a

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F},\ B\subset U} B \subset U.$$

Pour montrer l'autre inclusion, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Soit donc $x \in U$ et $R > 0$ tel que $\overline{B}(x,R) \subset U$. Il existe alors $\bar{x} \in \mathbb{Q}^N \cap \overline{B}(x,R/4)$ et $\bar{r} \in \mathbb{Q}^+$ tels que $R/4 < \bar{r} < R/2$ de sorte que $x \in \overline{B}(\bar{x},\bar{r}) \subset \overline{B}(x,R) \subset U$, ce qui montre que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F},\ B\subset U} B \supset U$$

et donc l'égalité. On en déduit que $\mathcal{F}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} :\ {}^c B \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable. Par conséquent, $\mathcal{G}$ est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans $\mathcal{G}$, on en déduit que la tribu $\mathcal{G}$ contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout $B \subset \mathbb{R}^N$ Borélien et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C \subset B$ tel que $\nu(B\backslash C) < \varepsilon$. En particulier, pour $B = A$, on obtient un fermé $C \subset A$ tel que $\mu(A\backslash C) < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := C \cap \overline{B}(0,n)$ qui est un compact inclu dans A. Comme $\mu(C) \leq \mu(A) < \infty$), on a $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$. Pour n assez grand, on obtient donc un compact $K_n \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$.

Si $\mu(A) = \infty$, on décompose $A = \bigcup_j (A\cap C_j)$ où $C_j = \{x \in \mathbb{R}^N :\ j \leq |x| < j+1\}$. Comme μ est une mesure de Radon, $\mu(A \cap C_j) < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par ce qui a été montré précédemment, il existe un compact $K_j \subset A \cap C_j$ tel que $\mu(K_j) \geq \mu(A \cap C_j) - 2^{-j}$. Par convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=0}^{n} K_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(K_j) \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\mu(A\cap C_j) - \frac{1}{2^j}\right) = \infty = \mu(A).$$

Comme $\bigcup_{j=0}^n K_j$ est compact, on obtient ainsi l'approximation intérieure par des compacts.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. Si $\mu(A) = \infty$, il suffit de considérer l'ouvert $U = \mathbb{R}^N$. On peut donc supposer que $\mu(A) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $B(0,n) \setminus A$ étant un Borélien de mesure finie (car μ est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé $C_n \subset B(0,n) \setminus A$ tel que

$$\mu((B(0,n) \setminus A) \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Posons $U_n = B(0,n) \setminus C_n$ qui est un ouvert avec $B(0,n) \cap A \subset U_n$ et tel que

$$\mu(U_n \setminus (A \cap B(0,n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Si on pose $U := \bigcup_n U_n$ qui est un ouvert, on obtient que $A \subset U$ et

$$\mu(U \setminus A)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n \setminus (A \cap B(0,n)) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la propriété de régularité extérieure. □

1.2 Pourquoi ne peut-on pas mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$?

Une mesure priviliégiée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ est la mesure de Lebesgue qui correspond intuitivement à la notion de volume. Nous démontrerons au chapitre 2 son existence de diverses manières. Avant cela, il convient de noter que cette mesure, temporairement notée λ en dimension $N = 1$, doit satisfaire certaines propriétés comme l'invariance par translation ainsi que la formule usuelle pour la longueur d'un intervalle $\lambda([a, b]) = b - a$.

Nous allons montrer qu'une telle mesure, si elle existe, ne peut pas être définie sur toutes les partie de $\mathbb{R}$. L'exemple suivant, dû à Vitali, montre en fait l'existence d'un ensemble non Lebesgue mesurable.

Pour ce faire, on introduit la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ par

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

On note $[x]$ la classe d'équivalence de x qui est un sous-ensemble de $[0, 1]$. L'ensemble des classes d'équivalences définit une partition de $[0, 1]$. A l'aide de l'axiome de choix, on construit un sous-ensemble V de $[0, 1]$, appelé *ensemble de Vitali*, qui ne contient qu'un et un seul élément de chaque classe d'équivalence.

Soit $D := \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ qui est dénombrable. Pour $q \in D$, on pose $V_q = q + V$ de sorte que $V_q \subset [-1, 2]$. Pour tout $y \in [0, 1]$, par définition de V, il existe un unique $x \in V$ tel que $y \in [x]$. Par conséquent, il existe un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $y - x = q$. De plus comme x et $y \in [0, 1]$, on a que $q \in [-1, 1]$ ce qui montre que $q \in D$ et $y = q + x \in V_q$. On en déduit alors que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in D} V_q \subset [-1, 2].$$

Supposons maintenant que V est Lebesgue mesurable de sorte que chaque V_q l'est aussi pour tout $q \in D$. Par passage à la mesure de Lebesgue λ dans les inclusions précédentes, il vient

$$1 \leq \lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) \leq 3. \tag{1.2.1}$$

Notons que si q et $q' \in D$ sont tels que $q \neq q'$, alors $V_q \cap V_{q'} = \emptyset$. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait $y \in V_q \cap V_{q'}$ et donc des éléments x et $x' \in E$ tels que

$$y = q + x = q' + x'.$$

On en déduirait alors que $x - x' = q' - q \in \mathbb{Q}$ ce qui impliquerait que $x = x'$ puisque V contient un unique élément de chaque classe d'équivalence. Par suite, on obtiendrait que $q = q'$ ce qui est absurde. Les ensembles V_q étant donc deux à deux disjoints, il vient que

$$\lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) = \sum_{q \in D} \lambda(V_q) = \sum_{q \in D} \lambda(q + V) = \sum_{q \in D} \lambda(V),$$

où l'on a utilisé l'invariance par translation de λ. Si $\lambda(V) > 0$, on obtient alors que

$$\lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) = \infty,$$

ce qui contredit la deuxième inégalité de (1.2.1). Si, en revanche, $\lambda(V) = 0$ on obtient alors que

$$\lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) = 0,$$

ce qui contredit la première inégalité de (1.2.1). Dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce implique que l'ensemble V ne peut être Lebesgue mesurable.

1.3 Mesures extérieures

Pour pouvoir "mesurer" toutes les parties d'un ensemble, il convient d'affaiblir la notion de mesure en celle de mesure extérieure. Dans cette section, on désigne par X un ensemble et par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.3.1. Une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ est appelée *mesure extérieure* si elle vérifie
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(ii) Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(X)$ tels que $A \subset B$, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Si une mesure sur la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$ est toujours une mesure extérieure, la réciproque n'est pas forcément vraie. Toutefois il est possible de restreindre μ^* à une tribu sur laquelle μ^* est une mesure.

Définition 1.3.2. Un ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ est dit μ^**-mesurable* si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par sous-additivité d'une mesure extérieure, pour vérifier qu'un ensemble A est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$.

Théorème 1.3.3. (de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Alors la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables est une tribu et la restriction de μ^* à $\mathcal{A}$ est une mesure.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est une tribu. Clairement, on a $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire puisque $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$ et $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie (ce qui fera de $\mathcal{A}$ une algèbre). Si A_1 et A_2 sont μ^*-mesurables, par sous-additivité de μ^*, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2 \setminus A_1) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, puis que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, posons $A = \bigcup_n A_n$ et montrons que $A \in \mathcal{A}$. On définit $A'_0 = A_0$ puis $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$ pour tout $n \geq 1$; $\mathcal{A}$ étant une algèbre, on obtient ainsi une suite $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles dans $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion $\bigcup_n A'_n = \bigcup_n A_n = A$.

Posons $B_n = \bigcup_{k\leq n} A'_k \in \mathcal{A}$, on obtient alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \setminus B_n) \\
&= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A'_{n+1}),
\end{aligned}$$

car les A'_n sont deux à deux disjoints. Ceci établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_n). \tag{1.3.1}$$

Les ensembles B_n étant μ^*-mesurables, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n)$$

ce qui implique, par (1.3.1) et croissance de μ^* ($B_n \subset A$), que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ et sous-additivité de la mesure extérieure μ^*, il vient

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \tag{1.3.2}$$

ce qui montre que $A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $A'_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $E = A$ dans (1.3.2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que μ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$. □

Si à présent (X, d) est un espace métrique (que l'on peut donc munir de la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(X)$, engendrée par les ouverts), le résultat suivant donne un critère assurant la μ^*-mesurabilité des ensembles Boréliens de X.

Proposition 1.3.4. *Si, pour tout A, $B \subset X$ avec $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, on a*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \tag{1.3.3}$$

alors $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Puisque la tribu Borélienne $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par les fermés, il suffit de montrer que tous les fermés de X sont μ^*-mesurables. De plus, par sous-additivité de μ^*, il suffit d'établir que si $C \subset X$ est fermé,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \text{pour tout } E \subset X \text{ tel que } \mu^*(E) < \infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(E \setminus C_n, E \cap C) \geq 1/n > 0$, l'hypothèse montre que

$$\mu^*(E \setminus C_n) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \setminus C_n) \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E). \tag{1.3.4}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in E : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\mathrm{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j - i| \geq 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k}\right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

et

$$\sum_{k=0}^{m} \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{m} R_{2k+1}\right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(E) < \infty$. Comme C est fermé, on a $E \setminus C = (E \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de μ^*,

$$\mu^*(E \setminus C_n) \leq \mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$, $\mu^*(E \setminus C_n) \to \mu^*(E \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (1.3.4), il vient

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$$

ce qui montre effectivement la μ^*-mesurabilité de C. □

1.4 Les mesures par dualité

On désigne par $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dont le support, noté

$$\mathrm{Supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : \ f(x) \neq 0\}},$$

est un ensemble compact. Toute mesure de Radon μ définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu$$

est bien définie puisque, en notant $K = \mathrm{Supp}(f)$, on a

$$\int_K |f| \, d\mu \leq \mu(K) \max_K |f| < \infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu$$

définit une forme linéaire positive $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, *i.e.*,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \text{pour tout } f,\, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \text{ et tout } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{1.4.1}$$

$$L(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \text{ avec } f \geq 0. \tag{1.4.2}$$

Nous allons en fait montrer que toute forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ peut être représentée de façon unique par une telle mesure.

Théorème 1.4.1 (de représentation de Riesz). *Soit $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive (i.e. qui satisfait (1.4.1) et (1.4.2)). Alors, il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^N$ telle que*

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N). \tag{1.4.3}$$

Pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^N$, on définit

$$\mu^*(V) := \sup\{L(f) :\ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1]),\ \mathrm{Supp}(f) \subset V\}. \tag{1.4.4}$$

Si $U \subset V$, alors $\mu^*(U) \le \mu^*(V)$ de sorte que l'on peut étendre μ^* à n'importe quel ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ en posant

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(V) :\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\} \quad \text{pour tout } E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \tag{1.4.5}$$

Lemme 1.4.2. *La fonction d'ensemble $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,+\infty]$ est une mesure extérieure.*

Démonstration. On a évidemment que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et μ^* est une fonction croissante d'ensemble, *i.e.* si $E \subset F$, alors $\mu^*(E) \le \mu^*(F)$. Il s'agit à présent de montrer que μ^* est dénombrablement sous-additive, *i.e.*, pour toute suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Montrons d'abord que si V_1 et V_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$,

$$\mu^*(V_1 \cup V_2) \le \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2). \tag{1.4.6}$$

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(g) \subset V_1 \cup V_2$. Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_1) \subset V_1$, $\mathrm{Supp}(f_2) \subset V_2$ et $f_1 + f_2 = 1$ sur $\mathrm{Supp}(g)$. Par conséquent, pour $i = 1, 2$, $f_i g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $g = f_1 g + f_2 g$ de sorte que, par linéarité de L et la définition de μ^*,

$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \le \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2).$$

Par passage au supremum en g, on obtient $\mu^*(V_1 \cup V_2) \le \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$.

Si $\mu(E_n) = \infty$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors le résultat suit. Sinon, si $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n, alors quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V_n tel que $E_n \subset V_n$ et $\mu^*(V_n) < \mu^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon$. On définit $V := \bigcup_n V_n$ et on considère $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=0}^{p} V_n$. En itérant (1.4.6), il vient

$$L(f) \le \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{p} V_n\right) \le \sum_{n=0}^{p} \mu^*(V_n) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quelque soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, et $\bigcup_n E_n \subset V$, on en déduit que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \le \mu^*(V) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

ce qui montre la dénombrable sous-additivité, le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. □

D'après le Théorème de Carathéodory (voir le Théorème 1.3.3), la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables, *i.e.*, l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{R}^N$ qui satisfont

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{pour tout } E \subset \mathbb{R}^N,$$

est une tribu sur $\mathbb{R}^N$, et la restriction $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ de μ^* à cette tribu est une mesure. De plus, pour tout $A,\, B \subset \mathbb{R}^N$ avec $\mathrm{dist}(A,B) > 0$, on a

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

En effet, par sous-additivité de μ^*, il suffit de montrer que $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Soit $W \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tel que $A \cup B \subset W$. Comme $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, il existe des ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V \subset W$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Soient f et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ des fonctions telles que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $\mathrm{Supp}(g) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f) \cap \mathrm{Supp}(g) = \emptyset$, la fonction $f + g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ satisfait $\mathrm{Supp}(f+g) \subset U \cup V$, et par définition de μ^* sur les ouverts, on a

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U \cup V) \geq L(f+g) = L(f) + L(g).$$

Par passage au supremum par rapport à f et g, on en déduit que

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U) + \mu^*(V) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts $W \supset A \cup B$, on obtient le résultat voulu. Une application immédiate de la Proposition 1.3.4 montre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{A}$. Par conséquent, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est une mesure Borélienne. Montrons à présent que μ est une mesure de Radon.

Lemme 1.4.3. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$\mu(K) = \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]), \ g = 1 \ \textit{sur} \ K\}.$$

En particulier, $\mu(K) < \infty$.

Démonstration. Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Pour tout $0 < t < 1$, l'ensemble $V_t := \{g > t\}$, qui est ouvert, satisfait $K \subset V_t$ et $f \leq t^{-1} g$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V_t$. Par conséquent, la croissance de L montre que

$$\mu(K) \leq \mu(V_t) = \sup\{L(f) : \ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]), \ \mathrm{Supp}(f) \subset V_t\} \leq t^{-1} L(g) < \infty.$$

En faisant tendre $t \to 1^-$, on obtient $\mu(K) \leq L(g)$ et donc, par passage à l'infimum en g,

$$\mu(K) \leq \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]), \ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

L'autre inégalité se montre en considérant un ouvert arbitraire $U \subset \Omega$ contenant K. Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ est une fonction telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $f = 1$ sur K, il vient par définition de μ^* sur les ouverts que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]), \ g = 1 \text{ sur } K\} \leq L(f) \leq \mu(U),$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à U, que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]), \ g = 1 \text{ sur } K\} \leq \mu(K),$$

ce montre la deuxième inégalité. □

Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve du théorème de représentation de Riesz.

Démonstration du théorème 1.4.1. Il reste à établir la propriété de représentation (1.4.3). Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, par linéarité de L, il suffit d'établir que

$$L(f) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu. \tag{1.4.7}$$

Soit $K := \mathrm{Supp}(f)$ et $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui contient $f(K)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 < a = y_1 < \cdots < y_n = b$ et $\max_{1 \leq i \leq n}(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$. On définit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$B_i := f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]) \cap K.$$

Comme f est continue, les ensembles B_i constituent une partition Borélienne de K. D'après la propriété de régularité extérieure (1.4.5), il existe un ouvert V_i contenant B_i tel que $\mu(V_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$. Par ailleurs, l'ouvert $W_i = f^{-1}(]y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon[)$ contenant B_i, on obtient en posant $U_i = V_i \cap W_i$ un ouvert contenant B_i et satisfaisant

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sup_{U_i} f \leq y_i + \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Comme $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est un recouvrement ouvert du compact K, on peut trouver une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, *i.e.* des fonctions $h_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(h_i) \subset U_i$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K et

$$0 \leq \sum_{i=1}^n h_i \leq 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}^N.$$

Par conséquent, $f = \sum_{i=1}^n h_i f$ et $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ dans $\mathbb{R}^N$, puis par linéarité et croissance de L, il vient

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) L(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) L(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n L(h_i).$$

Comme $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ est telle que $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K, le Lemme 1.4.3 montre que

$$\sum_{i=1}^n L(h_i) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) \geq \mu(K).$$

Par ailleurs, la définition de μ^* sur les ouverts (et donc de μ) montre $L(h_i) \leq \mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$, de sorte que

$$L(f) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\left(\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) - |a|\mu(K).$$

Comme $\{B_1, \ldots, B_n\}$ est une partition de K, on en déduit que

$$\begin{aligned}
L(f) &\leq \sum_{i=1}^n y_i \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + \mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (1.4.7), le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

Etablissons enfin l'unicité. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de Radon satisfaisant la conclusion du théorème de représentation de Riesz. Soient $A \subset \mathbb{R}^N$ un Borélien, $K \subset A$ un compact et $V \supset A$ un ouvert. D'après le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$ d'où $\mathbf{1}_K \leq f \leq \mathbf{1}_V$. Il vient alors

$$\mu_1(K) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_K \, d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu_1 = L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu_2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_V \, d\mu_2 = \mu_2(V).$$

Par régularité intérieure de μ_1 et régularité extérieure de μ_2, il vient $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$. En inversant les rôles de μ_1 et μ_2, on en déduit que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. $\square$

1.5 Théorème de la classe monotone : unicité de mesures

Définition 1.5.1. On appelle *classe monotone* sur X toute famille $\mathscr{C}$ de parties de X vérifiant :
(i) $X \in \mathscr{C}$;
(ii) Si A, $B \in \mathscr{C}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathscr{C}$;
(iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{P}(X)$ (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Une tribu est toujours une classe monotone, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Théorème 1.5.2. (de la classe monotone) *Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de X stable par intersection finie et contenant X. Alors la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{C}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ et $\mathscr{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{E}$. Comme $\mathscr{T}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$. Il s'agit maintenant de montrer l'autre inclusion.

Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie. Soit $E \in \mathcal{E}$ fixé et

$$\mathscr{C}_E := \{A \in \mathscr{C} :\ A \cap E \in \mathscr{C}\}.$$

Comme $E = X \cap E \in \mathcal{E}$, on en déduit que $X \in \mathscr{C}_E$. Par ailleurs, si A, $B \in \mathscr{C}_E$ et $A \subset B$, alors $A \cap E \in \mathscr{C}$, $B \cap E \in \mathscr{C}$ et $A \cap E \subset B \cap E$, ce qui implique que $(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \mathscr{C}$ et donc que $B \setminus A \in \mathscr{C}_E$. Enfin si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_E$, alors on a $A_n \cap E \in \mathscr{C}$ et $A_n \cap E \subset A_{n+1} \cap E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(\bigcup_n A_n) \cap E = \bigcup_n (A_n \cap E) \in \mathscr{C}$, soit $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}_E$. On en déduit que $\mathscr{C}_E$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$, i.e.

$$A \cap E \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{C} \text{ et tout } E \in \mathcal{E}.$$

Soit maintenant $B \in \mathscr{C}$ et

$$\mathscr{C}_B := \{A \in \mathscr{C} :\ A \cap B \in \mathscr{C}\}.$$

On montre de même que $\mathscr{C}_B$ est une classe monotone qui, d'après ce qui précède, contient $\mathcal{E}$. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_B$, ce qui signifie que

$$A \cap B \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A, B \in \mathscr{C}.$$

Montrons à présent que $\mathscr{C}$ est une tribu. On sait déjà que $\mathscr{C}$ contient X et que $\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire et intersection finie. Il s'ensuit que $\mathscr{C}$ est également stable par union finie. Il reste à montrer que $\mathscr{C}$ est stable par union dénombrable. Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_n.$$

Comme $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie, il vient $B_n \in \mathscr{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et $\mathscr{C}$ étant une classe monotone, on en déduit que $\bigcup_n B_n \in \mathscr{C}$. Finalement, comme $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$ on en déduit que $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Comme $\mathscr{C}$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$, on obtient l'autre inclusion $\mathscr{T} \subset \mathscr{C}$. □

On introduit maintenant la notion de pavé dans $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.5.3. Un *pavé* ouvert (resp. fermé) $P \subset \mathbb{R}^N$ est le produit cartésien de N intervalles ouverts (resp. fermés) bornés de $\mathbb{R}$:

$$P = \prod_{i=1}^{N}]a_i, b_i[\qquad \left(\text{resp. } P = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]\right),$$

avec $a_i < b_i$ (resp. $a_i \leq b_i$) pour tout $1 \leq i \leq N$.

En particulier, les boules $B_\infty(x, r)$ pour la norme

$$\|y\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |y_i|, \quad y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$$

sont des pavés de $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 1.5.4. *Soient λ et μ deux mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$ qui coïncident sur les pavés ouverts. Alors $\lambda = \mu$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ la famille des pavés ouverts dans $\mathbb{R}^N$. Clairement $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Montrons que la tribu $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathcal{E}$ est la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^N$. En effet, on a tout d'abord l'inclusion $\mathscr{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer l'autre inclusion, on considère un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ et le sous ensemble dénombrable de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{F}_U := \{(B_\infty(a, r) \subset U : \ a \in U \cap \mathbb{Q}^N \text{ et } r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

de boules (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de centre rationnel et de rayon rationnel, incluses dans U. Si $x \in U$ et $R > 0$ tel que $B_\infty(x, R) \subset U$, alors il existe $a \in U \cap \mathbb{Q}^N$ tel que $\|x - a\|_\infty < R/4$. De plus, il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $R/4 < r < R/2$, ce qui implique que $x \in B_\infty(a, r)$ et $B_\infty(a, r) \subset B_\infty(x, R) \subset U$. On a donc montré que

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{F}_U} B$$

et donc que $U \in \mathscr{T}$. Comme la tribu Borélienne est engendrée par les ouverts, on en déduit l'autre inclusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{T}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\lambda_n(B) := \lambda(B \cap]-n, n[^N), \quad \mu(B \cap]-n, n[^N) =: \mu_n(B).$$

Comme λ et μ sont des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$, on en déduit que λ_n et μ_n sont des mesures Boréliennes finies sur $\mathbb{R}^N$. On définit

$$\mathscr{C}_n = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : \ \lambda_n(A) = \mu_n(A)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Alors $\mathbb{R}^N \in \mathscr{C}_n$ car $\lambda_n(\mathbb{R}^N) = \lambda(]-n, n[^N) = \mu(]-n, n[^N) = \mu_n(\mathbb{R}^N)$ puisque $]-n, n[^N \in \mathcal{E}$. Ensuite si $A, B \in \mathscr{C}_n$ sont tels que $A \subset B$, alors $\lambda_n(B \setminus A) = \lambda_n(B) - \lambda_n(A) = \mu_n(B) - \mu_n(A) = \mu_n(B \setminus A)$ ce qui montre que $B \setminus A \in \mathscr{C}_n$. Enfin si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_n$, alors $\lambda_n(A_k) = \mu_n(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis passage à la limite quand $k \to \infty$,

$$\lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \lambda_n(A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu_n(A_k) = \mu_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right),$$

ce qui montre que $\bigcup_k A_k \in \mathscr{C}_n$. On a donc établi que $\mathscr{C}_n$ est une classe monotone. Comme par hypothèse $\mathscr{C}_n$ contient $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C}_n$ contient la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ qui, en vertu du théorème de la classe monotone, coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$, i.e. la tribu Borélienne. On a donc établi que $\mathscr{C}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, i.e. $\lambda_n(B) = \mu_n(B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ou encore

$$\lambda(B \cap]-n, n[^N) = \mu(B \cap]-n, n[^N).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, il vient $\lambda(B) = \mu(B)$. $\square$

Chapitre 2

La mesure de Lebesgue

L'objet de ce chapitre est de montrer l'existence et l'unicité d'une mesure de Radon $\mathcal{L}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ satisfaisant

1. $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$;
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}^N(x+B) = \mathcal{L}^N(B)$.

La mesure $\mathcal{L}^N$ s'appelle la *mesure de Lebesgue.*

2.1 On règle une fois pour toute la question de l'unicité

Soient λ et μ deux mesures de Radon invariantes par translation telles que $\lambda([0,1]^N) = \mu([0,1]^N) = 1$. Montrons que $\lambda = \mu$.

Etape 1. Montrons tout d'abord que si $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, N\}$, alors $\lambda(\{x_i = a\}) = 0$. Nous supposons pour simplifier que $i = 1$ et $a = 0$. Alors

$$\lambda(\{x_1 = 0\}) = \lambda\left(\{x_1 = 0\} \cap \bigcup_{n \geq 1} [-n,n]^N\right) = \lim_{n \to \infty} \lambda\left(\{x_1 = 0\} \cap [-n,n]^N\right). \tag{2.1.1}$$

On définit $E_n := \{x_1 = 0\} \cap [-n,n]^N$ et on observe que

$$[-n,n]^N = \bigcup_{y_1 \in [-n,n]} (y_1 e_1 + E_n) \supset \bigcup_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} (y_1 e_1 + E_n),$$

où les ensembles Boréliens $\{y_1 e_1 + E_n\}_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}}$ sont disjoints deux à deux. Comme λ est finie sur les compacts, il vient en utilisant l'invariance par translation que

$$\sum_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} \lambda(E_n) = \sum_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} \lambda(y_1 e_1 + E_n) = \lambda\left(\bigcup_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} (y_1 e_1 + E_n)\right) \leq \lambda([-n,n]^N) < \infty,$$

ce qui n'est possible que si $\lambda(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, en vertu de (2.1.1), on obtient que $\lambda(\{x_1 = 0\}) = 0$. On montre de même que $\mu(\{x_1 = 0\}) = 0$.

Etape 2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[0,1[^N = \bigcup_{k \in \{0,\ldots,n-1\}^N} \left(\frac{k}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right),$$

où les ensembles Boréliens dans l'union précédente sont deux à deux disjoints. Il vient alors que

$$
\begin{aligned}
1 = \lambda([0,1]^N) = \lambda([0,1[^N) &= \lambda\left(\bigcup_{k\in\{0,\dots,n-1\}^N}\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right)\right)\\
&= \sum_{k\in\{0,\dots,n-1\}^N}\lambda\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right) = \sum_{k\in\{0,\dots,n-1\}^N}\lambda\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right) = n^N\lambda\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right),
\end{aligned}
$$

d'où $\lambda([0,1/n[^N) = n^{-N}$. On montre de même que $\mu([0,1/n[^N) = n^{-N}$.

Etape 3. Montrons à présent que λ et μ coïncident sur les pavés de côtés rationnels. Soit $Q := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ avec a_i et $b_i \in \mathbb{Q}$ et $a_i < b_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$. Alors il existe des entiers $n \in \mathbb{N}$, α_i et $\beta_i \in \mathbb{Z}$ tels que $a_i = \alpha_i/n$ et $b_i = \beta_i/n$. Par conséquent,

$$
Q = \left(\frac{\alpha_1}{n},\dots,\frac{\alpha_N}{n}\right) + \prod_{i=1}^N \left[0,\frac{q_i}{n}\right],
$$

avec $q_i = \beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N}$. En vertu de l'invariance par translation de λ, on en déduit que

$$
\lambda(Q) = \lambda\left(\prod_{i=1}^N \left[0,\frac{q_i}{n}\right[\right).
$$

Par ailleurs,

$$
\lambda\left(\prod_{i=1}^N \left[0,\frac{q_i}{n}\right[\right) = \lambda\left(\prod_{i=1}^N\left(\bigcup_{k_i=0}^{q_i-1}\left[\frac{k_i}{n},\frac{k_i+1}{n}\right[\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{k\in K}\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right)\right),
$$

où $K := \{k \in \mathbb{N}^N : 0 \le k_i \le q_i - 1 \text{ pour tout } i \in \{1,\dots,N\}\}$. En utilisant de nouveau l'invariance par translation de λ, on obtient

$$
\begin{aligned}
\lambda\left(\prod_{i=1}^N \left[0,\frac{q_i}{n}\right[\right) &= \sum_{k\in K}\lambda\left(\frac{k}{n}+\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right) = \sum_{k\in K}\lambda\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[^N\right)\\
&= \frac{1}{n^N}\mathrm{Card}(K) = \frac{1}{n^N}\prod_{i=1}^N q_i = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).
\end{aligned}
$$

On obtient finalement que $\lambda(Q) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$ et on montre de même que $\mu(Q) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$.

Etape 4. Montrons enfin que λ et μ coïncident sur tous les pavés. Soit $Q := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ avec a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ avec $a_i < b_i$ pour $i \in \{1,\dots,N\}$. Il existe des suites $\{a_i^n\}_{n\ge1}$ et $\{b_i^n\}_{n\ge1} \subset \mathbb{Q}$ telles que $a_i^n \searrow a_i$ et $b_i^n \nearrow b_i$ quand $n \to \infty$, quelque soit $i \in \{1,\dots,N\}$. Comme $\{\prod_{i=1}^N [a_i^n, b_i^n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de pavés fermés dont l'union est le pavé ouvert $\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\prod_{i=1}^N [a_i,b_i]\right) &= \lambda\left(\prod_{i=1}^N]a_i,b_i[\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\prod_{i=1}^N [a_i^n,b_i^n]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^N (b_i^n - a_i^n) \\
&= \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\prod_{i=1}^N [a_i^n,b_i^n]\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^N]a_i,b_i[\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^N [a_i,b_i]\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la classe monotone montre finalement que $\lambda(B) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2.2 Deux constructions

2.2.1 Première approche par mesure extérieure

La première approche de nature purement géométrique consiste à voir la mesure de Lebesgue comme une généralisation naturelle celle de volume. Il convient donc d'étudier au préalable la notion de volume pour la classe élémentaires d'ensembles que sont les pavés.

Définition 2.2.1. Le *volume* d'un pavé ouvert ou fermé $P = \prod_{i=1}^N (a_i, b_i)$ est donné par

$$|P| = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

Notons que si P est un pavé fermé tel que, pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, N\}$, on a $a_{i_0} = b_{i_0}$, alors $|P| = 0$.

Le premier résultat ci-dessous montre que l'application volume est additive sur la classe des pavés d'intérieurs deux à deux disjoints.

Lemme 2.2.2. *Soit $P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ un pavé fermé. Si, pour tout $1 \le i \le N$, chaque intervalle $[a_i, b_i]$ est subdivisé en k_i sous-intervalles*

$$a_i = a_{i,0} < a_{i,1} < \dots < a_{i,k_i} = b_i,$$

alors P se décompose comme la réunion de $\prod_{i=1}^N k_i$ pavés

$$P_{j_1,\dots,j_N} := [a_{1,j_1-1}, a_{1,j_1}] \times \dots \times [a_{N,j_N-1}, a_{N,j_N}]$$

d'intérieurs deux à deux disjoints

$$P = \bigcup_{j_1=1}^{k_1} \cdots \bigcup_{j_N=1}^{k_N} P_{j_1,\dots,j_N},$$

tels que

$$|P| = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{k_N} |P_{j_1,\dots,j_N}|.$$

Démonstration. Pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$b_i - a_i = \sum_{j_i=1}^{k_i} (a_{i,j_i} - a_{i,j_i-1})$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |P| &= (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N) \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^{k_1} (a_{1,j_1} - a_{1,j_1-1}) \right) \cdots \left(\sum_{j_N=1}^{k_N} (a_{N,j_N} - a_{1,j_N-1}) \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{k_N} (a_{1,j_1} - a_{1,j_1-1}) \cdots (a_{N,j_N} - a_{N,j_N-1}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{k_N} |P_{j_1,\dots,j_N}|, \end{aligned}$$

où l'on a posé $P_{j_1,\dots,j_N} := [a_{1,j_1-1}, a_{1,j_1}] \times \cdots \times [a_{N,j_N-1} - a_{N,j_N}]$. □

On montre à présent que l'application volume est sous-additive sur la classe des pavés.

Lemme 2.2.3. *Soient P, $P_1, \dots, P_m$ des pavés tels que*

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

Alors

$$|P| \leq \sum_{i=1}^{m} |P_i|.$$

Démonstration. Comme l'intersection de deux pavés reste un pavé et que l'application volume est croissante pour l'inclusion, on ne restreint pas la généralité en supposant que

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

On prolonge chaque pavé à l'infini et on obtient ainsi $n \geq m$ sous-pavés $\widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_n$ de P d'intérieurs deux à deux disjoints tels que, pour tout $1 \leq i \leq m$, chaque P_i satisfait

$$P_i = \bigcup_{j \in J_i} \widetilde{P}_j, \quad P = \bigcup_{j=1}^{n} \widetilde{P}_j,$$

avec $J_1 \cup \cdots \cup J_m = \{1, \dots, n\}$. D'après le Lemme 2.2.2, on a

$$|P_i| = \sum_{j \in J_i} |\widetilde{P}_j|, \quad |P| = \sum_{j=1}^{n} |\widetilde{P}_j|.$$

Par conséquent, on a

$$|P| = \sum_{i=1}^{m} |P_i|,$$

ce qui montre le résultat voulu. □

Nous pouvons à présent introduire la mesure (extérieure) de Lebesgue. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, on pose

$$\mathcal{L}^N_*(A) := \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} |Q_i| : \ A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i, \ Q_i \text{ cubes ouverts}\right\}.$$

A l'aide de la méthode I de construction de Carathéodory, on montre que $\mathcal{L}^N_*$ est une mesure extérieure. On notera $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ la tribu des ensembles $\mathcal{L}^N_*$-mesurables et $\mathcal{L}^N$ la restriction de $\mathcal{L}^N_*$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ qui est donc une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ en vertu du Théorème de Carathéodory. Notons tout d'abord que le volume d'un cube étant invariant par translation, on en déduit que $\mathcal{L}^N_*$ (et donc aussi $\mathcal{L}^N$) est invariant par translation.

Montrons à présent que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ contient la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^N$. Pour ce faire, établissons que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathcal{L}^N_*(A) = \mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) := \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} |Q_i| : \ A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i, \ Q_i \text{ cubes ouverts, } \operatorname{diam}(Q_i) \leq \delta\right\}. \tag{2.2.1}$$

Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{L}^N_*(A) \leq \mathcal{L}^N_{*,\delta}(A)$. Pour montrer l'autre inégalité, considérons des cubes ouverts $Q_i = x_i +]-\frac{r_i}{2}, \frac{r_i}{2}[^N$, $i \in \mathbb{N}$, tels que $A \subset \bigcup_i Q_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2\sqrt{N}/k \leq \delta$, on décompose $\overline{Q}_i$ en l'union de cubes fermés $\overline{Q}_{ij} = x_{ij} + [-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}]^N$, $j \in J_i$, de côté $1/k$ et d'intérieurs deux à deux disjoints. D'après le Lemme 2.2.2, on a

$$\frac{\operatorname{Card}(J_i)}{k^N} = r_i^N.$$

Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on introduit le cube ouvert $Q^\varepsilon_{ij} = x_{ij} +]-\frac{1+\varepsilon}{2k}, \frac{1+\varepsilon}{2k}[^N$ de sorte que $Q_i \subset \bigcup_{j \in J_i} Q^\varepsilon_{ij}$ et $\operatorname{diam}(Q^\varepsilon_{ij}) \leq \sqrt{N}(1+\varepsilon)/k \leq 2\sqrt{N}/k \leq \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \in J_i} |Q^\varepsilon_{ij}| = \sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{Card}(J_i) \left(\frac{1+\varepsilon}{k}\right)^N = (1+\varepsilon)^N \sum_{i=0}^{\infty} r_i^N = (1+\varepsilon)^N \sum_{i=0}^{\infty} |Q_i|.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les cubes $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, on obtient que $\mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) \leq (1+\varepsilon)^N \mathcal{L}^N_*(A)$ puis, ε étant arbitraire $\mathcal{L}^N_{*,\delta}(A) \leq \mathcal{L}^N_*(A)$.

Pour établir que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, montrons que $\mathcal{L}^N_*(A \cup B) = \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B)$ pour tout A, $B \subset \mathbb{R}^N$ tels que $d = \operatorname{dist}(A, B) > 0$. Soit $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ des cubes ouverts de diamètre plus petit que $d/3$ et tels que $A \cup B \subset \bigcup_i Q_i$. On pose

$$I_A = \{i \in \mathbb{N} : \ A \cap Q_i \neq \emptyset\}, \quad I_B = \{i \in \mathbb{N} : \ B \cap Q_i \neq \emptyset\}$$

de sorte que $I_A \cap I_N = \emptyset$, $A \subset \bigcup_{i \in I_A} Q_i$ et $B \subset \bigcup_{i \in I_B} Q_i$. Donc

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |Q_i| \geq \sum_{i \in I_A} |Q_i| + \sum_{i \in I_B} |Q_i| \geq \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les cubes $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, il vient d'après (2.2.1)

$$\mathcal{L}^N_*(A \cup B) = \mathcal{L}^N_{*,d/3}(A \cup B) \geq \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B).$$

L'autre inégalité étant toujours satisfaite par sous-additivité de la mesure extérieure $\mathcal{L}^N_*$, on obtient bien que $\mathcal{L}^N_*(A \cup B) = \mathcal{L}^N_*(A) + \mathcal{L}^N_*(B)$. Nous sommes alors en position d'appliquer la Proposition

1.3.4 qui montre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, autrement dit, (la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ de) $\mathcal{L}^N$ est une mesure Borélienne. Comme elle est de plus finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N$ est une mesure de Radon.

Il s'agit enfin de montrer que $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$. En remarquant que $[0,1]^N \subset Q_\varepsilon :=]-\varepsilon, 1+\varepsilon[^N$ pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit par définition que

$$\mathcal{L}^N([0,1]^N) = \mathcal{L}^N_*([0,1]^N) \le |Q_\varepsilon| = (1+2\varepsilon)^N,$$

puis, par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{L}^N([0,1]^N) \le 1$.

Pour montrer la deuxième inégalité, on considère un recouvrement dénombrable de $[0,1]^N$ par des cubes ouverts $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$[0,1]^N \subset \bigcup_{i=0}^m Q_i.$$

D'après le Lemme 2.2.3, on en déduit que

$$1 = |[0,1]^N| \le \sum_{i=0}^m |Q_i| \le \sum_{i=0}^\infty |Q_i|.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvements de $[0,1]^N$ par des cubes ouverts, on en déduit que $1 \le \mathcal{L}^N([0,1]^N)$.

2.2.2 Deuxième approche par intégrale de Riemann

On définit $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ par

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx,$$

où l'intégrale précédente est prise au sens de Riemann. Clairement L est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure de Radon positive $\mathcal{L}^N$ telle que

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mathcal{L}^N \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N).$$

On définit, pour tout $n \ge 1$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f_n(x) := \prod_{i=1}^N \varphi_n^{a_i,b_i}(x_i)$, où

$$\varphi_n^{a_i,b_i}(x_i) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_i \notin [a_i, b_i], \\ 1 & \text{si} \quad x_i \in \left[a_i + \frac{1}{n}, b_i - \frac{1}{n}\right], \\ n(x_i - a_i) & \text{si} \quad x_i \in \left[a_i, a_i + \frac{1}{n}\right], \\ -n(x_i - b_i) & \text{si} \quad x_i \in \left[b_i - \frac{1}{n}, b_i\right]. \end{cases}$$

Alors $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ pour tout $n \ge 1$. Comme $\chi_{\overline{Q}_n} \le f_n \le \chi_Q$ où $\overline{Q}_n := \prod_{i=1}^N [a_i + 1/n, b_i - 1/n]$ et $Q = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$, en intégrant ces inégalités par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, il vient

$$\mathcal{L}^N(\overline{Q_n}) \le \int_{\mathbb{R}^N} f_n\, d\mathcal{L}^N = \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, dx \le \mathcal{L}^N(Q). \tag{2.2.2}$$

Comme $\{\overline{Q}_n\}_{n\ge1}$ est une suite croissante de fermés dont l'union est Q, on en déduit que $\mathcal{L}^N(\overline{Q}_n) \to \mathcal{L}^N(Q)$. Par ailleurs, par construction de f_n, son intégrale de Riemann peut être calculée explicitement

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, dx = \int_Q f_n(x)\, dx = \prod_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \varphi_n^{a_i,b_i}(x_i)\, dx_i = \prod_{i=1}^N \left(b_i - a_i - \frac{1}{n}\right).$$

Par passage à la limite dans (2.2.2), on obtient

$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i). \tag{2.2.3}$$

Montrons que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}^N(\{x_i = a\}) = 0. \tag{2.2.4}$$

On suppose pour simplifier que $i = 1$ et $a = 0$. Alors, pour tout $k \geq 1$, on a $\{x_1 = 0\} \cap\,]-n, n[^N \subset\,]-1/k, 1/k[\, \times\,]-n, n[^{N-1}$. D'après (2.2.3), on a

$$\mathcal{L}^N(\{x_1 = 0\} \cap\,]-n, n[^N) \leq \frac{2^N n^{N-1}}{k}.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, on fait d'abord tendre $k \to \infty$ ce qui donne $\mathcal{L}^N(\{x_1 = 0\} \cap\,]-n, n[^N) = 0$, puis par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $\mathcal{L}^N(\{x_1 = 0\}) = 0$.

Comme

$$\prod_{i=1}^N [a_i, b_i] \setminus \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\subset \bigcup_{i=1}^N (\{x_i = a_i\} \cup \{x_i = b_i\})$$

on en déduit que

$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i] \setminus \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = 0$$

de sorte que

$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right) = \mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

En particulier, en prenant $a_i = 0$ et $b_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on obtient $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$.

Il reste à montrer que $\mathcal{L}^N$ est invariante par translation. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et $V \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Comme la translation $\tau_x : y \in \mathbb{R}^N \mapsto x + y$ est un homéomorphisme (d'inverse $(\tau_x)^{-1} = \tau_{-x}$), alors $x + V$ est ouvert et, par définition de $\mathcal{L}^N$ sur les ouverts, on a

$$\mathcal{L}^N(x + V) = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, dy : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ \mathrm{Supp}(f) \subset x + V\right\}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset x + V$. En posant $g(z) := f(x + z)$, on obtient que $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ satisfait $\mathrm{Supp}(g) \subset V$ et donc, par définition de $\mathcal{L}^N(V)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} g(y - x)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\, dy \leq \mathcal{L}^N(V).$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions f, il vient $\mathcal{L}^N(x + V) \leq \mathcal{L}^N(V)$. Par conséquent, $\mathcal{L}^N(V) = \mathcal{L}^N(-x + (x + V)) \leq \mathcal{L}^N(x + V)$, ce qui montre que $\mathcal{L}^N(x + V) = \mathcal{L}^N(V)$. Par suite, en utilisant la régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, on obtient que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^N(x + B) &= \inf\{\mathcal{L}^N(V) :\ x + B \subset V,\ V \text{ ouvert}\} \\
&= \inf\{\mathcal{L}^N(-x + V) :\ B \subset -x + V,\ V \text{ ouvert}\} \\
&\geq \inf\{\mathcal{L}^N(U) :\ B \subset U,\ U \text{ ouvert}\} \\
&= \mathcal{L}^N(B).
\end{aligned}$$

Pour établir l'autre inégalité, on remarque que $\mathcal{L}^N(B) = \mathcal{L}^N(-x + (x + B)) \geq \mathcal{L}^N(x + B)$.

2.3 Points de Lebesgue

Dans la suite, nous allons considérer des familles $\mathcal{F}$ de boules ouvertes qui recouvrent un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$.

Théorème 2.3.1 (Recouvrement de Vitali). *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Borélien et $\mathcal{F}$ un recouvrement de A par des boules ouvertes. Pour tout $\alpha < \mathcal{L}^N(A)$, il existe des boules $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\alpha.$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.1.4, il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mathcal{L}^N(K) > \alpha$. Puisque $\mathcal{F}$ est un recouvrement ouvert du compact K, il existe un sous-recouvrement fini, i.e., des boules $\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n \in \mathcal{F}$ telles que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$. Soit $B_1 \in \{\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon, $B_2 \in \{\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon disjointe de B_1, $B_3 \in \{\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon disjointe de $B_1 \cup B_2$. On continue cette procédure un nombre fini m de fois avec $m \leq n$. Si $\widetilde{B}_i \notin \{B_1, \ldots, B_m\}$, alors par construction, il existe $1 \leq j \leq m$ tel que $\widetilde{B}_i \cap B_j \neq \emptyset$. Par ailleurs, si j est le plus petit tel indice, on a forcément que $\mathrm{diam}(\widetilde{B}_i) \leq \mathrm{diam}(B_j)$ et donc, en notant $B_j = B(x_j, r_j)$, on a $\widetilde{B}_i \subset B(x_j, 3r_j)$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{j=1}^m B(x_j, 3r_j)$ et

$$\alpha < \mathcal{L}^N(K) \leq \sum_{j=1}^{m} \mathcal{L}^N(B(x_j, 3r_j)) = 3^N \sum_{j=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_j),$$

ce qui conclut la preuve du résultat. $\square$

Corollaire 2.3.2 ("Presque-recouvrement" de Vitali). *Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{L}^N(U) < \infty$. Pour tout $\delta > 0$, il existe une famille dénombrable $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de boules ouvertes deux à deux disjointes telles que $B_i \subset U$ et $\mathrm{diam}(B_i) \leq \delta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et*

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = 0.$$

Démonstration. On pose

$$\mathcal{F}_1 := \{\text{boules ouvertes } B \subset U,\ \mathrm{diam}(B) \leq \delta\}$$

ce qui définit un recouvrement de U. D'après le Théorème de Recouvrement de Vitali, il existe $B_1, \ldots, B_{m_1} \in \mathcal{F}_1$ deux à deux disjointes telles que

$$\sum_{i=1}^{m_1} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\mathcal{L}^N(U)(1-\delta).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i\right) = \mathcal{L}^N(U) - \sum_{i=1}^{m_1} \mathcal{L}^N(B_i) \leq [1 - 3^{-N}(1-\delta)]\mathcal{L}^N(U) = \theta \mathcal{L}^N(U),$$

où l'on a posé $\theta := 1 - 3^{-N}(1-\delta) \in]0,1[$. On définit l'ouvert $U_2 := U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i$ et

$$\mathcal{F}_2 := \{B \in \mathcal{F}_1 :\ B \subset U_2,\ \mathrm{diam}(B) \leq \delta\}.$$

Le même argument que précédemment montre l'existence de boules $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_2} \in \mathcal{F}_2$ deux à deux disjointes telles que

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_2} \overline{B}_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_2} B_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U_2 \setminus \bigcup_{i=m_1+1}^{m_2} B_i\right) \le \theta \mathcal{L}^N(U_2) \le \theta^2 \mathcal{L}^N(U).$$

Notons que les boules $B_1, \dots, B_{m_1}, B_{m_1+1}, \dots, B_{m_2}$ sont deux à deux disjointes. On montre ainsi par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des boules ouvertes $B_1, \dots, B_{m_k} \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_k} B_i\right) \le \theta^k \mathcal{L}^N(U).$$

Le résultat suit par passage à la limite quand $k \to \infty$ puisque $\theta \in]0,1[$ et $\mathcal{L}^N(U) < \infty$. $\square$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on définit la *fonction maximale de Hardy-Littlewood* par

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy.$$

Lemme 2.3.3. *La fonction Mf est Borélienne sur $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration. On constate tout d'abord que la fonction

$$(x,r) \mapsto \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy$$

est continue sur $\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$. En effet, on a d'abord que $(x,r) \mapsto \mathcal{L}^N(B_r(x)) = \omega_N r^N$ est bien continue sur $\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$. Par ailleurs, si $(x_j, r_j) \to (x,r)$, on a que $\mathbf{1}_{B_{r_j}(x_j)}(y) \to \mathbf{1}_{B_r(x)}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus \partial B_r(x)$ avec $\mathcal{L}^N(\partial B_r(x)) = 0$. Par convergence dominée, on en déduit alors que

$$\int_{B_{r_j}(x_j)} |f(y)|\, dy \to \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy.$$

On peut alors écrire que

$$Mf(x) = \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

ce qui permet de montrer que Mf est un supremum dénombrable de fonctions continues. C'est en particulier une fonction Borélienne. $\square$

Proposition 2.3.4. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $t > 0$*

$$\mathcal{L}^N(\{Mf > t\}) \le \frac{3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dy.$$

Démonstration. On considère l'ensemble Borélien $A = \{Mf > t\}$. Par définition de la fonction maximale, pour tout $x \in A$, il existe un $r_x > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mathcal{L}^N(B_{r_x}(x))} \int_{B_{r_x}(x)} |f(y)|\, dy > t.$$

La famille $\mathcal{F} = \{B_{r_x}(x),\, x \in A\}$ forme un recouvrement A par des boules ouvertes. Le Théorème de recouvrement de Vitali montre alors que pour tout $\alpha < \mathcal{L}^N(A)$, il existe un nombre fini de boules $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\alpha.$$

Par conséquent,

$$\alpha < 3^N \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^N(B_i) \leq \frac{3^N}{t} \sum_{i=1}^m \int_{B_i} |f(y)|\, dx \leq \frac{3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dx,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Théorème 2.3.5 (Différentiation de Lebesgue). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

En particulier,

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy.$$

Démonstration. Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - g|\, dy \leq \varepsilon.$$

Comme g est uniformément continue, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |g(y) - g(x)|\, dy = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\leq \limsup_{r\to 0} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - g(y)|\, dy + \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |g(y) - g(x)|\, dy + |g(x) - f(x)| \right) \\
&\leq M(f-g)(x) + |g(x) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Il vient alors par la Proposition 2.3.4 et l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^N\left(\left\{ x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy > t \right\} \right) \\
&\leq \mathcal{L}^N(\{M(f-g) > t/2\}) + \mathcal{L}^N(\{|f-g| \geq t/2\}) \\
&\leq \frac{2 \cdot 3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f-g|\, dy + \frac{2}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f-g|\, dy \leq \frac{2\varepsilon(3^N + 1)}{t}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient que pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}^N\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\,dy > t\right\}\right) = 0,$$

puis, par passage à la limite quand $t \to 0$,

$$\mathcal{L}^N\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|\,dy > 0\right\}\right) = 0,$$

ce qui montre effectivement le résultat voulu. $\square$

Chapitre 3

Géométrie différentielle

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la généralisation des courbes et des surfaces dans l'espace Euclidien qui conduit ̀la notion de sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^N$.

3.1 Quelques rappels de calcul différentiel

Nous rappelons les résultats suivants de calcul différentiel qui seront centraux dans les arguments qui suivent.

Théorème 3.1.1 (d'inversion locale). *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $U \subset E$ un ouvert et $\varphi : U \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $x_0 \in U$ tel que $d\varphi(x_0) \in \mathscr{L}(E)$ est inversible. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x_0 et un ouvert $W \subset E$ contenant $\varphi(x_0)$ tels que φ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de V sur W.*

Le théorème d'inversion locale ne donne qu'un critère permettant de montrer qu'une fonction est difféomorphisme local. Le théorème d'inversion global permet en revanche de montrer, sous des hypothèses plus fortes, qu'une fonction est un difféomorphisme global.

Théorème 3.1.2 (d'inversion globale). *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $U \subset E$ un ouvert, $\varphi : U \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On suppose que φ est injective sur U et que $d\varphi(x) \in \mathscr{L}(E)$ est iversible pour tout $x \in U$. Alors $\varphi(U)$ est un ouvert et φ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.*

Le théorème des fonctions implicites permet de résoudre localement une équation cartésienne $f(x,y) = 0$ sous la forme $y = y(x)$. Autrement dit, il permet (localement) de montrer qu'un ensemble de niveau peut s'écrire comme le graphe d'une fonction.

Si E, F, et G sont des espaces vectoriels normés de dimension finie et $g : E \times F \to G$, nous considérerons par la suite les différentielles partielles $d_y g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(E, G)$ et $d_z g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(F, G)$ de f en $x_0 = (y_0, z_0) \in E \times F$ qui correspondent aux différentielles des fonctions partielles $y \in E \mapsto g(y, z_0)$ et $z \in F \mapsto g(y_0, z)$ en y_0 et z_0, respectivement. Si g est différentiable en (y_0, z_0), nous avons alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in E \times F$,

$$dg(y_0, z_0)(h_1, h_2) = d_y g(y_0, z_0)(h_1) + d_z g(y_0, z_0)(h_2).$$

Théorème 3.1.3 (des fonctions implicites). *Soient E, F, et G sont des espaces vectoriels normés de dimension finie tels que* $\dim(F) = \dim(G)$, *$U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts et $g : U \times V \to$*

G une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $x_0 = (y_0, z_0) \in U \times V$ tel que

$$\begin{cases} g(y_0, z_0) = 0, \\ d_z g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(F, G) \text{ est inversible.} \end{cases}$$

Alors, il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant y_0, un ouvert $V' \subset V$ contenant z_0 et une fonction $a : U' \to V'$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$\begin{cases} (y, z) \in U' \times V', \\ g(y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \in U', \\ z = a(y). \end{cases}$$

3.2 Sous-variétés

Définition 3.2.1. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Un sous ensemble M de $\mathbb{R}^N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^p$ si, pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ de U sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

La définition précédente en terme de <u>carte locale</u> signifie que localement, M est $\mathcal{C}^p$-difféomorphe à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Dans le résultat suivant, nous donnons d'autres caractérisations dont les preuves reposent sur les Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

Par la suite, si E et F désignent des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et $N-k$ tels que $\mathbb{R}^N = E \oplus F$, nous identifierons $\mathbb{R}^N$ et $E \times F$ via l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^N = E \oplus F & \to & E \times F, \\ x = y + z & \mapsto & (y, z). \end{array}$$

Par abus de notation, nous écrirons tout $x \in \mathbb{R}^N$ sous la forme $x = (y, z) \in E \times F$.

Théorème 3.2.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^p$;

(ii) <u>Fonction implicite :</u> pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et une fonction $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\};$$

(iii) <u>Graphe :</u> il existe deux sous-espaces de vectoriel E et F de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et $N-k$, respectivement tels que si $x_0 = (y_0, z_0) \in M$ (avec $y_0 \in E$, $z_0 \in F$), il existe un voisinage ouvert V de y_0 dans E, un voisinage ouvert W de z_0 dans F et une fonction $a : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \ y \in V\};$$

(iv) <u>Nappe paramétrée :</u> pour tout $x_0 \in M$, il existe un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^N$, un voisinage ouvert V de 0_E dans E et une fonction $f : V \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective et f réalise un homéomorphisme de V sur $M \cap U$.

Remarque 3.2.3. 1) La caractérisation (ii) d'une sous-variété M en terme de fonction implicite signifie que, localement, M est l'ensemble de niveau 0 d'une fonction $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-k}$. Une fonction $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ contenant x_0 et telle que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective s'appelle une *submersion* de classe $\mathcal{C}^p$ en x_0.

2) La caractérisation (iii) d'une sous-variété M en terme de graphe signifie que localement, M est le graphe d'une fonction $a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{N-k}$.

3) La caractérisation (iv) d'une sous-variété M en terme de nappe paramétrée signifie que, localement, M est l'image d'une fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$. Une telle fonction $f : V \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^k$ contenant 0 telle que $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ est injective s'appelle une *immersion* de classe $\mathcal{C}^p$ en 0.

Démonstration du Théorème 3.2.2. Carte locale $\Longrightarrow$ Fonction implicite : Soient $x_0 \in M$, U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de U sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

On définit $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ par

$$g(x) = (\varphi_{k+1}(x), \dots, \varphi_N(x)) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^p$ et d'après le théorème de différentiation des fonctions composées, on a pour tout $x \in U$,

$$dg(x)(h) = (d\varphi_{k+1}(x)(h), \dots, d\varphi_N(x)(h)) \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N.$$

Comme φ est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme local au voisinage de x_0, on en déduit que $d\varphi(x_0) \in GL_N(\mathbb{R})$ et donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^{N-k}$ il existe un unique $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $d\varphi(x_0)(h) = (0_{\mathbb{R}^k}, v)$, ce qui montre que

$$dg(x_0)(h) = v$$

et donc que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective. On a donc montré que g est une submersion de classe $\mathcal{C}^p$ en x_0. Enfin,

$$\begin{aligned} x \in M \cap U \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in U \text{ et } \varphi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in U \text{ et } g(x) = 0. \end{aligned}$$

Fonction implicite $\Longrightarrow$ Graphe : Soient $x_0 \in M$, U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\}.$$

Comme $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective on a $\mathrm{rg}(dg(x_0)) = N - k$ et le Théorème du rang montre que $E = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Soit $F = E^\perp$ le supplémentaire orthogonal à E dans $\mathbb{R}^N$ (qui est un sous espace vectoriel de dimension $N - k$). Nous identifions $\mathbb{R}^N$ à $E \times F$ de sorte que $x_0 = (y_0, z_0) \in E \times F$. Quitte à réduire U, nous pouvons supposer que $U = V \times W$ où V est un voisinage ouvert de y_0 dans E et W est un voisinage ouvert de z_0 dans F. Considérons l'application partielle

$$g(y_0, \cdot\,) : W \to \mathbb{R}^{N-k}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^p$. Sa différentielle en z_0 est donnée par $d_z g(y_0, z_0) = dg(x_0)|_{\{0_E\} \times F} \in \mathscr{L}(F; \mathbb{R}^{N-k})$. Si $v \in F$ est tel que $d_z g(y_0, z_0)(v) = dg(x_0)(0, v) = 0$, alors $v \in \mathrm{Ker}(dg(x_0)) = E$ ce qui montre que

$v = 0$. Par conséquent, $d_z g(y_0, z_0)$ est injective et donc bijective puisque $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^{N-k}) = N - k$. On en déduit que $d_z g(y_0, z_0)$ est inversible de sorte que nous pouvons appliquer le Théorème des fonctions implicites. Il existe donc un ouvert $V' \subset V$ contenant y_0, un ouvert $W' \subset W$ contenant z_0 et une fonction $a : V' \to W'$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$\begin{cases} (y,z) \in V' \times W', \\ g(y,z) = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in V', \\ z = a(y). \end{cases}$$

Par conséquent,

$$M \cap (V' \times W') = \{(y, a(y)) : \; y \in V'\}.$$

Graphe $\Longrightarrow$ Carte locale : On suppose que $\mathbb{R}^N = E \times F$ où E (resp. F) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k (resp. $N - k$). Soient $x_0 = (y_0, z_0) \in M$ avec $y_0 \in E$, $z_0 \in F$, V un voisinage ouvert de y_0 dans E, W un voisinage ouvert de z_0 dans F et $a : V \to W$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \; y \in V\}.$$

Soit $\varphi : V \times W \to \mathbb{R}^N$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \varphi(y,z) = (y, z - a(y)) \quad \text{ pour tout } x = (y,z) \in V \times W.$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $V \times W$. De plus φ est clairement bijective de $V \times W$ sur son image $\varphi(V \times W)$ d'inverse donné par

$$\varphi^{-1}(y', z') = (y', z' + a(y')) \quad \text{ pour tout } (y', z') \in \varphi(V \times W).$$

Par ailleurs, pour tout $x = (y,z) \in V \times W$ et tout $h = (h_1, h_2) \in E \times F$, on a

$$d\varphi(x)(h) = (h_1, h_2 - da(y)(h_1)),$$

de sorte que $d\varphi(x) \in GL_N(\mathbb{R})$. Le Théorème d'inversion globale montre que φ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $V \times W$ sur son image (qui est ouverte).

Enfin,

$$\begin{aligned} x = (y,z) \in M \cap (V \times W) \quad &\Longleftrightarrow \quad (y,z) \in V \times W \text{ et } z = a(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \in \varphi(V \times W) \text{ et } \varphi_{k+1}(x) = \cdots = \varphi_N(x) = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\varphi(M \cap (V \times W)) = \varphi(V \times W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

Graphe $\Longrightarrow$ Nappe paramétrée : Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et $N-k$, respectivement, tels que si $x_0 = (y_0, z_0) \in M$ (avec $y_0 \in E$, $z_0 \in F$), il existe un voisinage ouvert V de y_0 dans E, un voisinage ouvert W de z_0 dans F et une fonction $a : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^p$ avec

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \; y \in V\}.$$

On définit

$$\begin{aligned} f : V - y_0 \quad &\to \quad \mathbb{R}^N \\ y \quad &\mapsto \quad (y_0 + y, a(y_0 + y)) \end{aligned}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ouvert $V - y_0$. Par conséquent, $V' = f^{-1}(V \times W)$ est un ouvert de $V - y_0$ contenant 0_E puisque $f(0_E) = (y_0, a(y_0)) = (y_0, z_0) \in V \times W$. On a de plus

$df(0)(h) = (h, da(y_0)(h))$ pour tout $h \in E$. Par conséquent, $df(0)(h) = 0$ implique que $h = 0$, ce qui montre que $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective et donc que f est une immersion de classe $\mathcal{C}^p$ en 0.

Montrons que $f : V' \to M \cap U$ est bijective. Tout d'abord, si y_1 et $y_2 \in V'$ sont tels que $f(y_1) = f(y_2)$, on en déduit que $(y_0 + y_1, a(y_0 + y_1)) = (y_0 + y_2, a(y_0 + y_2))$ ce qui montre que $y_1 = y_2$ et donc que a est injective sur V'. Par ailleurs, pour tout $x = (y, z) \in M \cap U$, on a $z = a(y)$, donc en posant $\bar{y} := y - y_0$, on a $f(\bar{y}) = (y_0 + \bar{y}, a(y_0 + \bar{y})) = (y, z) = x \in U$ ce qui implique que $\bar{y} \in V'$ et $f(\bar{y}) = x$. Ceci implique que f est surjective de V' sur $M \cap U$ et donc que f réalise une bijection de V' sur $M \cap U$. Remarquons que l'application réciproque $f^{-1} : M \cap U \to V$ est donnée par

$$f^{-1}(x) = ((x - x_0)_1, \dots, (x - x_0)_k) \quad \text{pour tout } x \in M \cap U \tag{3.2.1}$$

qui définit bien une fonction continue sur $M \cap U$. Nous avons finalement montré que $f : V' \to M \cap U$ est un homéomorphisme.

Nappe paramétrée $\Longrightarrow$ Graphe : Soit $x_0 \in M$, E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, U un voisignage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$, V un voisinage ouvert de 0_E dans E et $f : V \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R}^N)$ est injective et f réalise un homéomorphisme de V sur $U \cap M$.

Comme $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective, $F_1 := \mathrm{Im}(df(0))$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Soit $F_2 = F_1^\perp$ le supplémentaire orthogonal à F_1 dans $\mathbb{R}^N$ (qui est un sous espace vectoriel de dimension $N - k$). En identifiant $\mathbb{R}^N$ à $F_1 \times F_2$, on a $x_0 = (y_0, z_0) \in F_1 \times F_2$. On note $P_1 : \mathbb{R}^N \to F_1$ (resp. $P_2 : \mathbb{R}^N \to F_2$) la projection sur F_1 (resp. F_2) et on définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} J : V & \to & F_1 \\ y & \mapsto & P_1(f(y)). \end{array}$$

La fonction J est de classe $\mathcal{C}^p$ sur V et on a $dJ(0)(h) = P_1 \circ df(0)(h)$ pour tout $h \in E$. De plus si $dJ(0)(h) = 0$ on en déduit que $df(0)(h) \in \mathrm{Ker}(P_1) = F_1^\perp = \mathrm{Im}(df(0))^\perp$ ce qui implique que $df(0)(h) = 0$, soit $h = 0$ puisque $df(0)$ est injective. On en déduit que $dJ(0) \in \mathscr{L}(E, F_1)$ est injective puis, comme $\dim(E) = \dim(F_1) = k$, que $dJ(0)$ est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $V_0 \subset V$ de 0_E dans E et un voisinage ouvert V_{y_0} de y_0 dans F_1 tels que J réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de V_0 sur V_{y_0}.

Soit $\tilde{U} = f(V_0)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ puisque V_0 est ouvert dans $\mathbb{R}^k$ et $f^{-1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ est continue d'après (3.2.1). Alors

$$\begin{array}{rcl} x = (y, z) \in M \cap \tilde{U} & \Longleftrightarrow & \text{il existe } y' \in V_0 \text{ tel que } x = f(y') \\ & \Longleftrightarrow & \text{il existe } y' \in V_0 \text{ tel que } y = J(y') \text{ et } z = P_2(f(y')) \\ & \Longleftrightarrow & y \in V_{y_0},\ y' = J^{-1}(y) \text{ et } z = P_2(f(y')) \\ & \Longleftrightarrow & y \in V_{y_0} \text{ et } z = P_2(f(J^{-1}(y))). \end{array}$$

Soit $a : V_{y_0} \to F$ la fonction définie par $a(y) = P_2 \circ f \circ J^{-1}(y)$ pour tout $y \in V_{y_0}$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$. On a bien montré que $M \cap \tilde{U} = \{(y, a(y)) : y \in V_{y_0}\}$. □

Exemple 3.2.4. 1) Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert. Alors $M = V \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il suffit de choisir pour tout $x_0 \in M$ l'ouvert $U = V \times B_{\mathbb{R}^{N-k}}(0, r)$ (avec $r > 0$ arbitraire) et $\varphi = \mathrm{id}$.

2) La sphère $\mathbb{S}^{N-1} = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \cdots + x_N^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $N - 1$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^N x_j^2 - 1 \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$dg(x)(h) = 2x \cdot h \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui montre que $dg(x)$ est surjective pour tout $x \in \mathbb{S}^{N-1}$. De plus $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : \ g(x) = 0\}$.

3.3 Espace tangent

La notion d'espace tangent pour les sous-variétés généralise celle de droite tangente pour les courbes.

Définition 3.3.1. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'espace tangent à M en x_0, noté $T_{x_0}M$, est défini par

$$T_{x_0}M := \Big\{ v \in \mathbb{R}^N : \ \text{il existe un intervalle ouvert } I \text{ contenant } 0 \text{ et} \\ \gamma \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \gamma(I) \subset M,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma'(0) = v \Big\}.$$

Nous allons voir que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k.

Théorème 3.3.2. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'espace tangent à M en x_0 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. De plus, on a les caractérisations suivantes :*
(i) Carte locale : $T_{x_0}M = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$;
(ii) Nappe paramétrée : $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0))$.
(iii) Graphe : $T_{x_0}M = \{(h, da(x_0)(h)) : \ h \in E\}$;
(iv) Fonction implicite : $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$.

Démonstration. Fixons un point $x_0 \in U$.

(i) Carte locale : Soit U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

Montrons tout d'abord que $T_{x_0}M \subset d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$. Soit $v \in T_{x_0}M$, alors il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une application $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle I, on peut supposer que $\gamma(I) \subset U$. On peut alors définir $\tilde\gamma(t) = \varphi(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$ de sorte que $\tilde\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Comme $\gamma(t) \in M \cap U$ pour tout $t \in I$, alors $\tilde\gamma(t) \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$ et donc $\tilde\gamma'(0) = d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d\varphi(x_0)(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$. On en déduit que $v \in d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$.

Pour montrer l'autre inclusion, fixons un élément $w \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$. Comme $\varphi(U)$ est ouvert contenant $\varphi(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(U)$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[& \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tw) \end{array}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$ pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ et $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$, on en déduit que $\gamma(t) \in M \cap U$ pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$. De plus $\gamma(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on doit avoir que $\gamma'(0) = d(\varphi^{-1})(\varphi(x_0))(w) = d\varphi(x_0)^{-1}(w) \in T_{x_0}M$. On a donc bien établi que $d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}) \subset T_{x_0}M$.

Comme $T_{x_0}M = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$ et $d\varphi(x_0) \in GL_N(\mathbb{R})$, on en déduit que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k.

(ii) Nappe paramétrée : Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$, V un voisinage ouvert de 0_E dans E et $f : V \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective et f réalise un homéomorphisme de V sur $M \cap U$.

Soit $w \in E$, comme V est un ouvert de E contenant 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $tw \in V$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[& \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & f(tw). \end{array}$$

Comme $f(V) = M \cap U$, on en déduit que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. De plus, la fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait $\gamma(0) = f(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on a $\gamma'(0) = df(0)(w) \in T_{x_0}M$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(df(0)) \subset T_{x_0}M$. Comme $df(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^N)$ est injective, $\mathrm{Im}(df(0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Comme $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, on en déduit que $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0))$.

(iii) Graphe : Soient E et F deux sous-espaces de vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et $N-k$, respectivement, et $y_0 \in E$, $z_0 \in F$ tels que si $x_0 = (y_0, z_0) \in M$. Soit V un voisinage ouvert de y_0 dans E, W un voisinage ouvert de z_0 dans F et $a : V \to W$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$M \cap (V \times W) = \{(y, a(y)) : \ y \in V\}.$$

Comme les fonctions f et a sont reliées par la relation

$$f(y) = (y_0 + y, a(y_0 + y)) \quad \text{pour tout } y \in V - y_0,$$

on en déduit que

$$T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0)) = \{df(0)(h) : \ h \in E\} = \{(h, da(x_0)(h)) : \ h \in E\}.$$

(iv) Fonction implicite : Soit U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\}.$$

Soit $v \in T_{x_0}M$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle I, on peut supposer que $\gamma(t) \in U$ pour tout $t \in I$. Par conséquent, $g(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in I$, puis en dérivant, il vient

$$dg(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En particulier, pour $t = 0$, on a $dg(x_0)(v) = 0$ ce qui montre que $v \in \mathrm{Ker}(dg(x_0))$ et donc que $T_{x_0}M \subset \mathrm{Ker}(df(x_0))$. Par ailleurs, la surjectivité de $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ montre que $\mathrm{Ker}(dg(x_0))$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, tout comme $T_{x_0}M$. Par conséquent, $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$. □

3.4 Extrema liés

Soit U est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Si f admet un extremum local en $x_0 \in U$, alors x_0 est un point critique de f, ce qui signifie

$$df(x_0) = 0. \tag{3.4.1}$$

Il s'agit d'un résultat propre à un ouvert de $\mathbb{R}^N$ car dans ce cas, on a le droit de faire toutes les variations infinitésimales autour de x_0 pour montrer que la différentielle s'annule en ce point.

Nous allons nous intéresser maintenant au cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage ouvert d'une sous-variété M. Dans ce cas, nous allons montrer que si f admet un extremum local sur M en x_0, alors f satisfait une condition d'optimalité d'ordre 1, similaire à (3.4.1). Le fait de travailler sur un espace ambiant qui n'est pas "plat" impose de faire des variations infinitésimales autour de x_0 dans l'espace tangent à M en x_0, ce qui se manifeste par l'apparition de multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 3.4.1. *Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage ouvert de M. On suppose que f admet un extremum local sur M en x_0, i.e. il existe un ouvert U contenant x_0 tel que*

$$f(x_0) \leq f(y) \quad \textit{pour tout } y \in M \cap U$$

ou

$$f(x_0) \geq f(y) \quad \textit{pour tout } y \in M \cap U.$$

Alors $T_{x_0}M \subset \mathrm{Ker}(df(x_0))$.

Démonstration. Soit $v \in T_{x_0}M$, il existe donc un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle I, on peut supposer que $\gamma(t) \in U$ pour tout $t \in I$. On en déduit que la fonction $t \in I \mapsto f(\gamma(t))$ admet un extremum local sur l'intervalle ouvert I en $t = 0$, ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = 0$$

ou encore $df(x_0)(v) = 0$. On en déduit que $v \in \mathrm{Ker}(df(x_0))$. □

Remarque 3.4.2. Si $V \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert, on montre en utilisant la définition par carte locale que V est une sous-variété de dimension N et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^N$ (il suffit de prendre $U = V$ et $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$). De plus, l'espace tangent $T_{x_0}V = \mathbb{R}^N$ pour tout $x_0 \in V$ (il suffit de considérer la courbe $\gamma(t) = x_0 + tv$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit et $v \in \mathbb{R}^N$ arbitraire). Dans ce cas, si $x_0 \in V$ est un point d'extremum local de f sur V, on a $\mathrm{Ker}(df(x_0)) = \mathbb{R}^N$ et donc $df(x_0) = 0$.

Le résultat général précédent se précise quand on écrit la sous-variété sous la forme d'une fonction implicite.

Théorème 3.4.3 (des extrema liés). *Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f, g_1, \ldots, g_p : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ($p \leq N$). On pose*

$$\Sigma := \{x \in U : \ g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\}.$$

Soit $x_0 \in \Sigma$ un extremum local de f sur Σ tel que la famille $\{dg_1(x_0), \ldots, dg_p(x_0)\}$ est libre. Alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dg_i(x_0).$$

Démonstration. Soit $g : U \to \mathbb{R}^p$ le champ de vecteur défini par

$$g(x) = (g_1(x), \ldots, g_p(x)) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

Comme les vecteurs $dg_1(x_0), \dots, dg_p(x_0)$ sont linéairement indépendants, la matrice jacobienne $J_g(x_0)$ admet un sous-déterminant d'ordre p non nul. Par continuité du déterminant, il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 tel que cette propriété subsiste pour tout $x \in U_{x_0}$. Autrement dit, les vecteurs $dg_1(x), \dots, dg_p(x)$ sont linéairement indépendants, ce qui montre que l'application linéaire $dg(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ est surjective pour tout $x \in U_{x_0}$. D'après la caractérisation d'une sous-variété par fonction implicite, ceci implique que $M := \Sigma \cap U_{x_0}$ est une sous-variété de dimension $k := N-p$ de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$.

D'après le Théorème 3.4.1, on en déduit que $T_{x_0}M \subset \mathrm{Ker}(df(x_0))$. La sous-variété M étant défini par fonction implicite, le Théorème 3.3.2 montre que $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0)) = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(dg_i(x_0))$. La conclusion provient du résultat suivant d'algèbre linéaire. $\square$

Lemme 3.4.4 (des noyaux). *Soient $\{L_1, \dots, L_p\}$ une famille libre dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Alors*

$$\bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(L_i) \subset \mathrm{Ker}(L)$$

si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$L = \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i. \tag{3.4.2}$$

Démonstration. Il est clair que si L est de la forme (3.4.2), alors on a $\bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(L_i) \subset \mathrm{Ker}(L)$. Réciproquement, montrons par récurrence qu'il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_p \in \mathbb{R}^N$ tels que $\langle L_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout i, $j \in \{1, \dots, p\}$.

(i) Si $p = 1$, l'hypothèse signifie que $\mathrm{Ker} L_1 \subset \mathrm{Ker} L$. Dans le cas $L_1 = 0$, alors $\mathrm{Ker} L_1 = \mathrm{Ker} L = \mathbb{R}^N$ et donc $L = 0$. Sinon, il existe un $e \in \mathbb{R}^N$ tel que $L_1(e) = 1$. Par conséquent, $x - L_1(x)e \in \mathrm{Ker} L_1$ et donc, par hypothèse, $x - L_1(x)e \in \mathrm{Ker} L$ soit $L(x) = L(e)L_1(x)$ et le résultat suit.

(ii) Supposons le résultat vrai au rang $p-1$ pour un certain entier $p \geq 1$. Comme la famille $\{L_1, \dots, L_p\}$ est libre, alors $L_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Montrons que pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ker} L_j \not\subset \mathrm{Ker} L_i$. En effet, dans le cas contraire, il existerait un $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\bigcap_{j \neq i_0} \mathrm{Ker} L_j \subset \mathrm{Ker} L_{i_0}$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, des réels $\{\lambda_j\}_{j \neq i_0}$ tels que $L_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} \lambda_j L_j$ ce qui impliquerait que la famille $\{L_1, \dots, L_p\}$ est liée et donc on aboutirait à une contradiction. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ il existe un $e_i \in \mathrm{Ker} L_j$ pour tout $j \neq i$ tel que $e_i \notin \mathrm{Ker} L_i$. Après renormalisation, on peut supposer que $L_i(e_i) = 1$ et $L_j(e_i) = 0$ pour tout $j \neq i$.

Si $x \in \mathbb{R}^N$, alors $x - \sum_{j=1}^p L_j(x) e_j \in \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker} L_i$ et donc par hypothèse $x - \sum_{j=1}^p L_j(x) e_j \in \mathrm{Ker} L$, soit $L(x) = \sum_{j=1}^p L_j(x) L(e_j)$, ce qui établit le résultat en posant $\lambda_j = L(e_j)$. $\square$

Chapitre 4

Mesures de Hausdorff

4.1 Définition et propriétés des mesures de Hausdorff

Définition 4.1.1. Soient $0 \leq s < \infty$ et $\delta > 0$. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, on définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2} \right)^s : \ I \subset \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{i \in I} A_i,\ \mathrm{diam}(A_i) \leq \delta \right\},$$

où

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

et $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$ est la fonction Gamma d'Euler. On pose ensuite

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

On appelle $\mathcal{H}^s$ la mesure de Hausdorff s-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^N$.

Remarque 4.1.2. (i) Le supremum définissant $\mathcal{H}^s(A)$ est en fait une limite que $\delta \to 0$ car si $\delta_1 \leq \delta_2$, alors $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$.

(ii) Si $s = k \in \mathbb{N}$, La constante de renormalisation ω_k coïncide avec le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^k$, i.e.

$$\omega_k = \mathcal{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\}).$$

(iii) Comme $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$, on peut supposer que les ensembles A_i sont fermés dans la définition de $\mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Théorème 4.1.3. *Pour tout* $0 \leq s < \infty$, $\mathcal{H}^s$ *est une mesure Borélienne.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure. Si $A \subset B$, on a clairement que $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$ puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$. Soit maintenant $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement $\{B_j^n\}_{j \in I}$ de A_n tel que $\mathrm{diam}(B_j^n) \leq \delta$ et

$$\mathcal{H}^s_\delta(A_n) \geq \sum_{j \in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(B_j^n)}{2} \right)^s - \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

Comme $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{j,n} B_j^n$, il vient

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n=0}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{j\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(B_j^n)}{2}\right)^s \leq \sum_{n=0}^\infty \mathcal{H}_\delta^s(A_n) + \delta \leq \sum_{n=0}^\infty \mathcal{H}^s(A_n) + \delta$$

et la sous-additivité suit par passage à la limite quand $\delta \to 0$.

Pour montrer que $\mathcal{H}^s$ est une mesure de Borel, en vertu de la Proposition 1.3.4, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ pour tout A, $B \subset \mathbb{R}^N$ tels que $\mathrm{dist}(A, B) > 0$. Soit $0 < \delta < \mathrm{dist}(A, B)/4$ et $\{C_k\}_{k\in I}$ une recouvrement de $A \cup B$ avec $\mathrm{diam}(C_k) \leq \delta$. Soient $\mathcal{A} := \{C_k : C_k \cap A \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{B} := \{C_k : C_k \cap B \neq \emptyset\}$ de sorte que $A \subset \bigcup_{C_k\in\mathcal{A}} C_k$, $B \subset \bigcup_{C_k\in\mathcal{B}} C_k$ et $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $C_i \in \mathcal{A}$ et $C_j \in \mathcal{B}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(C_k)}{2}\right)^s &\geq \sum_{C_i\in\mathcal{A}} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(C_i)}{2}\right)^s + \sum_{C_j\in\mathcal{B}} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\right)^s \\ &\geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B).\end{aligned}$$

Par passage à l'infimum sur tous les recouvrements $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $A \cup B$ dans le membre de gauche, il vient

$$\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B),$$

puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$,

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

L'autre inégalité est une conséquence immédiate de la sous-additivité de la mesure extérieure $\mathcal{H}^s$. Une application immédiate de la Proposition 1.3.4 montre que $\mathcal{H}^s$ est une mesure de Borel. □

Montrons à présent des propriétés basiques des mesures de Hausdorff.

Proposition 4.1.4. *(i)* $\mathcal{H}^0$ *est la mesure de comptage sur* $\mathbb{R}^N$ *;*

(ii) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ *dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *;*

(iii) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *pour tout* $\lambda > 0$ *et tout* $A \subset \mathbb{R}^N$ *;*

(iv) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *pour toute isométrie affine* $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ *et tout* $A \subset \mathbb{R}^N$ *;*

(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ *est une fonction Lipschitzienne, alors*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq [\mathrm{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A) \quad \textit{pour tout } A \subset \mathbb{R}^N;$$

(vi) Si $t > s$ *et* $A \subset \mathbb{R}^N$*, alors*

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = \infty.$$

Démonstration. (i) Si $\{a\}$ est un singleton, pour tout $\delta > 0$, on a $a \in B_{\delta/2}(a)$ de sorte que $\mathcal{H}_\delta^0(\{a\}) \leq \omega_0(\delta/2)^0 = 1$ et donc, en faisant tendre $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^0(\{a\}) \leq 1$. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $\{a\}$ par des ensembles de diamètre plus petit que δ, alors (en utilisant la convention $0^0 = 1$),

$$\omega_0 \sum_{i\in I} \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^0 \geq 1.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements, il vient $\mathcal{H}^0(\{a\}) \geq \mathcal{H}_\delta^0(\{a\}) \geq 1$. Par conséquent, $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$. Si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est un ensemble fini, $\mathcal{H}^0(A) = \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^0(\{a_i\}) = k = \#(A)$ et, si A est un ensemble infini $\mathcal{H}^0(A) = \infty = \#(A)$.

(ii) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble Borélien et $A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i, b_i[$, pour tout $\delta > 0$ on peut décomposer chacun des intervalles $[a_i, b_i]$ en une union finie de sous intervalles d'intérieurs disjoints et de diamètre plus petit que δ, i.e. $[a_i, b_i] = \bigcup_{j \in I_i} [\alpha_i^j, \beta_i^j]$ avec $\beta_i^j - \alpha_i^j \leq \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}_\delta^1(A) \leq \omega_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \in I_i} \frac{\operatorname{diam}([\alpha_i^j, \beta_i^j])}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i),$$

où l'on a utilisé le fait que $\omega_1 = 2$. Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{]a_i, b_i[\}_{i \in \mathbb{N}}$, on obtient par définition de la mesure de Lebesgue que $\mathcal{H}_\delta^1(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$, puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^1(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$

Pour montrer l'autre inégalité, considérons un recouvrement de $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ avec $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$, on pose $s_i = \inf A_i$ et $t_i = \sup A_i$ de sorte que $A_i \subset]s_i - \delta 2^{-(i+1)}, t_i + \delta 2^{-(i+1)}[$. Par définition de la mesure de Lebesgue, on a donc que

$$\mathcal{L}^1(A) \leq \sum_{i \in I} (t_i - s_i) + 2\delta = \omega_1 \sum_{i \in I} \frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2} + 2\delta,$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à tous les recouvrements $\{A_i\}_{i \in I}$, il vient

$$\mathcal{L}^1(A) \leq \mathcal{H}_\delta^1(A) + \delta.$$

On fait tendre ensuite $\delta \to 0$.

(iii) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de A avec $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$, alors $\{\lambda A_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de λA avec $\operatorname{diam}(\lambda A_i) \leq \lambda \delta$, d'où

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda A) \leq \lambda^s \sum_{i \in I} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2} \right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i \in I}$ de A,

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda A) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient $\mathcal{H}^s(\lambda A) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$. Pour montrer l'autre inégalité, on note simplement que

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(\lambda^{-1}(\lambda A)) \leq \lambda^{-s} \mathcal{H}^s(\lambda A).$$

(iv) Si $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie affine et $\{A_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement de A avec $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$, alors $\{L(A_i)\}_{i \in I}$ est un recouvrement de $L(A)$ avec $\operatorname{diam}(L(A_i)) = \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}_\delta^s(L(A)) \leq \sum_{i \in I} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(L(A_i))}{2} \right)^s = \sum_{i \in I} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2} \right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i \in I}$ de A et passage au supremum en δ, on obtient

$$\mathcal{H}^s(L(A)) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Comme $L^{-1} : L(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ est une isométrie affine, il vient

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(L^{-1}(L(A))) \leq \mathcal{H}^s(L(A)),$$

ce qui montre l'autre inégalité.

(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschtzienne et $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de A avec $\mathrm{diam}(A_i) \leq \delta$, alors $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $f(A)$ avec $\mathrm{diam}(f(A_i)) \leq \mathrm{Lip}(f)\mathrm{diam}(A_i) \leq \mathrm{Lip}(f)\delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^s_{\mathrm{Lip}(f)\delta}(f(A)) \leq \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(f(A_i))}{2}\right)^s \leq [\mathrm{Lip}(f)]^s \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ de A et passage au supremum en δ, on obtient

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq [\mathrm{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A).$$

(vi) est une conséquence du fait que, par définition de la mesure de Hausdorff, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} \mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$. □

Définition 4.1.5. La dimension de Hausdorff d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Par définition de la dimension de Hausdorff, on a que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$ et, d'après la Proposition 4.1.4-(vi), il vient que $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pour tout $s < \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

4.2 Mesures de Hausdorff versus mesure de Lebesgue

Nous allons à présent montrer que la la mesure de Hausdorff N-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^N$ coïncide avec la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$. La démonstration repose sur l'inégalité isodiamétrique qui stipule que le plus grand volume parmi tous les sous ensembles de diamètre $2r$ est $\omega_N r^N$, i.e. le volume de la boule. Remarquons que cette inégalité n'est pas complètement évidente car, comme le montre l'exemple d'un triangle équilatéral, il n'est pas vrai qu'un ensemble quelconque est contenu dans une boule de même diamètre.

Proposition 4.2.1 (Inégalité isodiamétrique). *Pour tout ensemble $\mathcal{L}^N$-mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \omega_N \left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2}\right)^N.$$

Démonstration. La preuve repose sur le principe de symétrisation de Steiner. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ avec $|\xi| = 1$, on note Π_ξ l'hyperplan orthogonal à ξ et

$$A^\xi_y := \{t \in \mathbb{R} : \ y + t\xi \in B\}$$

la section de A dans la direction ξ passant par le point y. D'après le Théorème de Fubini, l'application $y \mapsto \mathcal{L}^1(A^\xi_y)$ est $\mathcal{L}^{N-1}$-mesurable dans Π_ξ. Par conséquent l'ensemble

$$S_\xi(A) := \{y + t\xi : \ y \in \Pi_\xi, \ |t| \leq \mathcal{L}^1(B^\xi_y)/2\}$$

est toujours $\mathcal{L}^N$-mesurable. De plus, une nouvelle utilisation du Théorème de Fubini montre que $\mathcal{L}^N(S_\xi(A)) = \mathcal{L}^N(A)$.

Par définition, le nouvel ensemble $S_\xi(A)$ est symétrique par rapport à Π_ξ. Par ailleurs, si A est symétrique par rapport à Π_ν avec $\nu \cdot \xi = 0$, alors $S_\xi(A)$ conserve cette propriété. Pour voir cela, notons σ la symétrie par rapport à Π_ν, i.e. $\sigma(x) = x - 2(x \cdot \nu)\nu$, qui satisfait $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Montrons que

$$A^\xi_y = A^\xi_{\sigma(y)}.$$

En effet, si $t \in A^\xi_y$, alors $y + t\xi \in A$ et $\sigma(y + t\xi) = \sigma(y) + t\xi$ car $\xi \cdot \nu = 0$. Comme $\sigma(A) = A$, on en déduit que $\sigma(y) + t\xi = \sigma(y + t\xi) \in A$, ce qui montre que $t \in A^\xi_{\sigma(y)}$ et donc $A^\xi_y \subset A^\xi_{\sigma(y)}$. En appliquant cette même inclusion à $\sigma(y)$ en lieu en place de y, il vient $A^\xi_{\sigma(y)} \subset A^\xi_{\sigma^2(y)} = A^\xi_y$, ce qui montre la deuxième inclusion. Par conséquent, si $x = y + t\xi \in S_\xi(A)$, alors $\sigma(x) = \sigma(y) + t\xi$ avec $\sigma(y) \in \Pi_\xi$ et $2|t| \le \mathcal{L}^1(A^\xi_y) = \mathcal{L}^1(A^\xi_{\sigma(y)})$, ce qui montre que $\sigma(x) \in S_\xi(A)$ et donc que $S_\xi(A)$ est symétrique par rapport à Π_ν.

Montrons à présent que la symétrisation diminue le diamètre. Pour ce faire, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère x et $x' \in S_\xi(A)$ tels que

$$\mathrm{diam}(S_\xi(A)) \le |x - x'| + \varepsilon.$$

Soient $y = x - (x \cdot \xi)\xi$ et $y' = x' - (x' \cdot \xi)\xi \in \Pi_\xi$ et posons

$$r := \inf\{t : \ y + t\xi \in A\}, \quad s := \sup\{t : \ y + t\xi \in A\},$$

et

$$r' := \inf\{t : \ y' + t\xi \in A\}, \quad s' := \sup\{t : \ y' + t\xi \in A\}.$$

Supposons, sans restreindre la généralité que $s' - r \ge s - r'$. Alors

$$s' - r \ge \frac{1}{2}(s' - r) + \frac{1}{2}(s - r') = \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(s' - r') \ge \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A^\xi_y) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A^\xi_{y'}).$$

Comme $|x \cdot \xi| \le \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A^\xi_y)$ et $|x' \cdot \xi| \le \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A^\xi_{y'})$, il vient

$$s' - r \ge |x \cdot \xi| + |x' \cdot \xi| \ge |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|.$$

Par conséquent, comme $y + r\xi$ et $y' + s'\xi \in \overline{A}$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{diam}(S_\xi(A)) - \varepsilon)^2 &\le |x - x'|^2 = |y - y'|^2 + |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|^2 \\ &\le |y - y'|^2 + (s' - r)^2 = |(y + r\xi) - (y' + s'\xi)|^2 \le (\mathrm{diam}(\overline{A}))^2 = (\mathrm{diam}(A))^2,\end{aligned}$$

ce qui montre effectivement que $\mathrm{diam}(S_\xi(A)) \le \mathrm{diam}(A)$.

Nous sommes à présent en mesure de montrer l'inégalité isodiamétrique. Si $\mathrm{diam}(A) = \infty$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on considère une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$. On définit $A_1 = S_{e_1}(A)$, $A_2 = S_{e_2}(A_1), \dots, A_N = S_{e_N}(A_{N-1})$ et on pose $A^* = A_N$. Par construction, $\mathcal{L}^N(A^*) = \mathcal{L}^N(A)$, $\mathrm{diam}(A^*) \le \mathrm{diam}(A)$ et A^* est symétrique par rapport à Π_{e_k} pour tout $k = 1, \dots, N$. Par conséquent, si $x \in A^*$, alors $-x \in A^*$ de sorte que $A^* \subset B_{\mathrm{diam}(A^*)/2}(0)$, soit

$$\mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A^*) \le \mathcal{L}^N(B_{\mathrm{diam}(A^*)/2}(0)) = \omega_N \left(\frac{\mathrm{diam}(A^*)}{2}\right)^N \le \omega_N \left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2}\right)^N,$$

ce qui conclut la preuve de l'inégalité. $\square$

L'inégalité isodiamétrique permet montrer que la mesure de Hausdorff N-dimensionnelle coïncide avec la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$, généralisant ainsi la Proposition 4.1.4 (ii).

Théorème 4.2.2. *$\mathcal{H}^N = \mathcal{L}^N$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathcal{H}^N(A) < \infty$. Pour tout $\delta > 0$ il existe un recouvrement $\{A_i\}_{i\in I}$ tel que $\operatorname{diam}(A_i) \le \delta$ et

$$\omega_N \sum_{i\in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^N \le \mathcal{H}^N_\delta(A) + \delta \le \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

Rappelons que, sans restreindre la généralité, on peut supposer que les A_i sont fermés. Comme $A \subset \bigcup_i A_i$, on obtient grâce à l'inégalité isodiamétrique que

$$\mathcal{L}^N(A) \le \sum_{i\in I} \mathcal{L}^N(A_i) \le \omega_N \sum_{i\in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^N \le \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

On obtient que $\mathcal{L}^N(A) \le \mathcal{H}^N(A)$ par passage à la limite quand $\delta \to 0$. Si $\mathcal{H}^N(A) = \infty$, cette inégalité est immédiate.

Pour montrer l'autre inégalité, on commence par établir que $\mathcal{H}^N$ est une mesure de Radon absolument continue par rapport à $\mathcal{L}^N$. Pour ce faire, on remarque que si Q est un cube de $\mathbb{R}^N$, alors $\operatorname{diam}(Q) = \sqrt{N}\mathcal{L}^N(Q)^{1/N}$. Soit donc $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de A par des cubes ouverts. Si $\delta > 0$, quitte à subdiviser chaque cubes Q_i en plus petits cubes, on peut supposer que $\operatorname{diam}(Q_i) \le \delta$. Par définition de la mesure de Hausdorff, il vient

$$\mathcal{H}^N_\delta(A) \le \omega_N \sum_{i=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(Q_i)}{2}\right)^N = \omega_N \left(\frac{\sqrt{N}}{2}\right)^N \sum_{i=0}^\infty \mathcal{L}^N(Q_i).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de A et par passage à la limite quand $\delta \to 0$, il vient $\mathcal{H}^N(A) \le C_N \mathcal{L}^N(A)$.

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathcal{L}^N(A) < \infty$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, pour tout $\delta > 0$, il existe un ouvert U contenant A tel que $\mathcal{L}^N(U) \le \mathcal{L}^N(A) + \delta < \infty$. D'après le Théorème de presque-recouvrement de Vitali (Corollaire 2.3.2), il existe une famille dénombrable $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de boules ouvertes deux à deux disjointes, telle que $\operatorname{diam}(B_k) \le \delta$ et $B_k \subset U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{k=0}^\infty B_k\right) = 0.$$

Comme $\mathcal{H}^N_\delta$ est une mesure extérieure, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^N_\delta(A) &\le \sum_{k=0}^\infty \mathcal{H}^N_\delta(B_k) \le \sum_{k=0}^\infty \omega_N \left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^N \\ &= \sum_{k=0}^\infty \mathcal{L}^N(B_k) = \mathcal{L}^N\left(\bigcup_{k=0}^\infty B_k\right) \le \mathcal{L}^N(U) \le \mathcal{L}^N(A) + \delta.\end{aligned}$$

et passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient que $\mathcal{H}^N(A) \le \mathcal{L}^N(A)$. Cette inégalité reste évidemment vraie quand $\mathcal{L}^N(A) = \infty$. □

Remarque 4.2.3. Le résultat précédent montre que, pour tout $s < N$, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ n'est jamais une mesure de Radon dans $\mathbb{R}^N$

4.3 Formule de l'aire

Nous nous intéressons à présent à l'interprétation de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq N-1$. La formule de l'aire va nous permettre de montrer que $\mathcal{H}^k$ coïncide avec la mesure de volume sur les sous-variétés de dimension k dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème 4.3.1 (Formule de l'aire). *Soient $1 \leq k \leq N$, $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ injective telle que $x \in U \mapsto df(x)$ est bornée et, pour tout $x \in U$, $df(x)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^N$. Alors pour tout ensemble Borélien $A \subset U$, on a*

$$\mathcal{H}^k(f(A)) = \int_A \sqrt{\det\left(df(x)^T df(x)\right)}\, dx.$$

Démonstration. **Etape 1.** Commençons par établir que $f(A)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable. Par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, il existe une suite de compacts $K_i \subset A$ telle que $\mathcal{L}^k(A \backslash K_i) \to 0$. Par conséquent, f étant Lipschitzienne, il vient

$$\mathcal{H}^k\left(f(A) \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f(K_i)\right) \leq \mathcal{H}^k\left(f\left(A \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right)\right) \leq [\mathrm{Lip}(f)]^k \mathcal{L}^k\left(A \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right) = 0.$$

Comme f est continue et K_i compact, $f(K_i) \subset \mathbb{R}^N$ est compact et $\bigcup_i f(K_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent $f(A)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable comme union d'un ensemble Borélien et d'un ensemble de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle.

Etape 2. Supposons d'abord que $f = L$ est une application linéaire injective. On utilise la décomposition polaire pour décomposer $L = O \circ S$ où $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est une application linéaire inversible, symétrique, définie positive et $O : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application orthogonale. En effet, l'application linéaire $L^T L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est inversible (car injective), symétrique et définie positive. Par le théorème de décomposition spectrale, il existe une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de $\mathbb{R}^k$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ tels que $(L^T L)e_i = \lambda_i e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, de sorte que $L^T L = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \otimes e_i$. On pose alors

$$S := \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i} e_i \otimes e_i$$

qui définit une application linéaire $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ inversible, symétrique et définie positive. Posons alors $O := L \circ S^{-1}$ et $v_i := O(e_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} L(e_i) \in \mathbb{R}^N$. Par construction, $\{v_1, \ldots, v_k\}$ forme un système orthonormé de $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que O est orthogonale.

On définit la mesure de Radon positive $\nu(E) := \mathcal{H}^k(L(E))$ pour tout Borélien $E \subset \mathbb{R}^k$. Si $x \in \mathbb{R}^k$, on a par linéarité de L et invariance par translation de $\mathcal{H}^k$ que

$$\nu(x+E) = \mathcal{H}^k(L(x+E)) = \mathcal{H}^k(L(x) + L(E)) = \mathcal{H}^k(L(E)) = \nu(E).$$

Par conséquent, la mesure de Radon $\lambda := \nu/\nu([0,1]^k)$ est invariante par translation et satisfait $\lambda([0,1]^k) = 1$. Par unicité de la mesure de Lebesgue, on a donc que $\lambda = \mathcal{L}^k$, soit $\nu = \kappa \mathcal{L}^k$ où $\kappa = \nu([0,1]^k)$.

Montrons à présent que $\kappa = \sqrt{\det(L^T L)}$. En utilisant la décomposition polaire et le fait que O est orthogonale (en particulier une isométrie),

$$\kappa = \frac{\mathcal{H}^k(O \circ S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{H}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{L}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)}$$

car $S(E) \subset \mathbb{R}^k$ et $\mathcal{H}^k = \mathcal{L}^k$ sur $\mathbb{R}^k$. En choisissant en particulier

$$E = Q = \{x \in \mathbb{R}^k : \ 0 \leq x \cdot e_i \leq 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}$$

(le cube unité de $\mathbb{R}^k$ orienté suivant la base $\{e_1, \ldots, e_k\}$), on a que

$$S(Q) = \{y \in \mathbb{R}^k : \ 0 \leq y \cdot e_i \leq \sqrt{\lambda_i} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}$$

et donc $\mathcal{L}^k(S(Q)) = \prod_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} = \det(S) = \sqrt{\det(L^T L)}$ ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire dans le cas linéaire.

Etape 3. Considérons enfin le cas général d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ injective telle que $x \in U \mapsto df(x)$ est bornée et $df(x)$ est injective pour tout $x \in U$. Pour simplifier les notations, on pose $J_f := \sqrt{\det(df^T df)}$. Soit K un compact inclu dans U. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si x, y et $z \in K$ satisfont $|x - y| \leq \delta$ et $|x - z| \leq \delta$, alors

$$|J_f(x) - J_f(y)| \leq \varepsilon, \quad \|f(x) - f(y) - df(z)(y - x)\| \leq \varepsilon \|df(z)(x - y)\|.$$

En effet, la première condition résulte de l'uniforme continuité de J_f sur le compact K. La deuxième condition se démontre par l'absurde sur supposant l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ et de trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K telles que

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \|x_n - z_n\| \leq \frac{1}{n}$$

et

$$o(\|x_n - y_n\|) = \|f(x_n) - f(y_n) - df(z_n)(x_n - y_n)\| > \varepsilon_0 \|df(z_n)(y_n - x_n)\|.$$

Quitte à extraire une sous-suite (car K est compact), on peut supposer que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$ (avec $x = y = z$) et $v_n = (x_n - y_n)/\|x_n - y_n\| \to v$ avec $\|v\| = 1$. D'ou $o(1) > \varepsilon_0 \|df(z_n)(v_n)\|$ puis par passage à la limite $0 = \varepsilon_0 \|df(x)(v)\|$. Par conséquent, $v \in \mathbb{S}^{N-1}$ appartient au noyau de $df(x)$, ce qui est impossible par injectivite de $df(x)$.

En particulier, pour $\varepsilon < 1$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|df(z)(x - y)\| - \|f(x) - f(y) - df(z)(y - x)\| \geq (1 - \varepsilon)\|df(z)(y - x)\|$$

et

$$\|f(x) - f(x)\| \leq \|df(z)(x - y)\| + \|f(x) - f(y) - df(z)(y - x)\| \leq (1 + \varepsilon)\|df(z)(y - x)\|.$$

Soit $K = \bigcup_{i=1}^m A_i$ une partition Borélienne de K telle que $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$. On fixe $z_i \in A_i$ et on pose $L_i := df(z_i)$. Par hypothèse $L_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application linéaire injective et pour tout x, $y \in A_i$,

$$(1 - \varepsilon)\|L_i(x - y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq (1 + \varepsilon)\|L_i(x - y)\|,$$

ce qui montre que

$$\operatorname{Lip}_{L_i(A_i)}(f|_{A_i} \circ L_i^{-1}) \leq 1 + \varepsilon, \quad \operatorname{Lip}_{f(A_i)}(L_i \circ (f|_{A_i})^{-1}) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

En utilisant le fait que f est injective, on en déduit que $f(A \cap K) = \bigcup_{i=1}^m f(A \cap A_i)$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(f(A\cap K)) &= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(A\cap A_i)) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((f|_{A_i} \circ L_i^{-1})(L_i(A\cap A_i))) \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(A\cap A_i)) = (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{A\cap A_i} J_f(z_i)\,dx \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{A\cap A_i} J_f(x)\,dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k \mathcal{L}^k(K) \\
&= (1+\varepsilon)^k \int_{A\cap K} J_f(x)\,dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k \mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap K} J_f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^m \int_{A\cap A_i} J_f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^m \int_{A\cap A_i} J_f(z_i)\,dx + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(A\cap A_i)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((L_i \circ (f|_{A_i})^{-1}) f(A\cap A_i)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K) \\
&\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(A\cap A_i)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K) = \frac{1}{(1-\varepsilon)^k}\mathcal{H}^k(f(A\cap K)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\mathcal{H}^k(f(A\cap K)) = \int_{A\cap K} J_f(x)\,dx,$$

puis, en choisissant $K = K_n$ où $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts tels que $\bigcup_n K_n = U$ et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$\mathcal{H}^k(f(A)) = \int_A J_f(x)\,dx,$$

ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire. □

Remarque 4.3.2. (i) Si $k = 1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule du calcul de la longueur d'une courbe

$$\mathcal{H}^1(f(E)) = \int_E \|f'(t)\|\,dt.$$

(ii) Si $k = N-1$ et $f(x) = (x, a(x))$ où $a : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule de l'aire du graphe de a

$$\mathcal{H}^{N-1}(\{(x,a(x)) :\ x \in E\}) = \int_E \sqrt{1 + \|\nabla a(x)\|^2}\,dx.$$

Chapitre 5

Formule de Gauss-Green

5.1 Partition de l'unité régulière

On commence par montrer une généralisation du lemme d'Urysohn au cas de fonctions régulières.

Lemme 5.1.1. *Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $V \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tels que $K \subset V$. Alors, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \le f \le 1$ dans $\mathbb{R}^N$, $f = 1$ sur K et* $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.

Démonstration. Soit $d = \mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^N \setminus V) > 0$, on pose

$$U = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, K) < d/3\}, \quad U' = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, K) < 2d/3\}$$

de sorte que $K \subset U \subset\subset U' \subset\subset V$.

On considère une fonction $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\eta \ge 0$, $\mathrm{Supp}(\eta) \subset \overline{B}_1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(y)\, dy = 1$. On pose alors $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-N}\eta(\cdot/\varepsilon)$ de sorte que $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\eta_\varepsilon \ge 0$, $\mathrm{Supp}(\eta_\varepsilon) \subset \overline{B}_\varepsilon$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(y)\, dy = 1$. On définit $f_\varepsilon := f * \eta_\varepsilon$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_U(y)\, dy.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, on a $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, si $x \notin \overline{U} + \overline{B}_\varepsilon$, alors $|x-y| > \varepsilon$ dès lors que $y \in \overline{U}$, ce qui implique que $f_\varepsilon(x) = 0$. Par conséquent, si $\varepsilon < d/3$, alors $\mathrm{Supp}(f_\varepsilon) \subset \overline{U} + \overline{B}_\varepsilon \subset \overline{U}'$, ce qui montre que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\mathrm{Supp}(f_\varepsilon) \subset V$. Par ailleurs, si $x \in K$ et $y \in B_\varepsilon(x)$, alors $y = (y-x) + x \in B_\varepsilon + K \subset U$. Par conséquent, si $x \in K$, on a

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_U(y)\, dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(z)\, dz = 1.$$

La fonction $f := f_{d/6}$ satisfait donc les propriétés requises. □

Le résultat suivant donne l'existence d'une partition de l'unité régulière.

Proposition 5.1.2. *Soient $V_1, \dots, V_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe des fonctions $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que* $\mathrm{Supp}(\theta_i) \subset V_i$ *et $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ sur K.*

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et une boule ouverte B_x centrée en x et telle que $\overline{B_x} \subset V_i$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$, et comme K est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{x_j}$. On définit K_i comme l'union des boules fermées $\overline{B_{x_j}}$ contenues dans V_i. Alors K_i est un compact tel que $K_i \subset V_i$ et $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, soit U_i un ouvert borné tel que $K_i \subset U_i \subset\subset V_i$. D'après le Lemme 5.1.1, il existe une fonctions $f_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq f_i \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N$, $f_i = 1$ sur $\overline{U}_i$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^{n} f_i \geq 1$ sur $U := \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ qui est un ouvert contenant K. En utilisant de nouveau le Lemme 5.1.1, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq f \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$, $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset U$. Par conséquent,

$$1 - f + \sum_{i=1}^{n} f_i \geq 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

et donc la fonction

$$\theta_i = \frac{f_i}{1 - f + \sum_{j=1}^{n} f_j}$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$. Clairement on a $0 \leq \theta_i \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$, $\mathrm{Supp}(\theta_i) \subset V_i$ et $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$ sur K. □

5.2 Ouverts à frontière régulière

Définition 5.2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que Ω est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe

— un $r > 0$,

— une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$,

— une fonction $a : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$

tels que, en identifiant $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{N-1})$ avec $\mathbb{R}^{N-1}$ et $\mathrm{Vect}(e_N)$ avec $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Omega \cap Q_r(x) &= \{y \in Q_r(x) : \ y_N < a(y_1, \ldots, y_{N-1})\}, \\ \partial\Omega \cap Q_r(x) &= \{y \in Q_r(x) : \ y_N = a(y_1, \ldots, y_{N-1})\}, \end{aligned}$$

où $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \ |y_i - x_i| < r \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N\}$. Si $k \geq 1$, la normale unitaire extérieure à Ω en $y = (y_1, \ldots, y_{N-1}, a(y_1, \ldots, y_{N-1}) = (y', a(y')) \in \partial\Omega \cap Q_r(x)$ est bien définie et est donnée par

$$\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla a(y')\|^2}}(-\nabla a(y'), 1).$$

De plus, si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, est une fonction continue dans un voisinage de $\partial\Omega$, la formule de l'aire montre que l'intégrale de bord de φ sur $\partial\Omega \cap Q_r(x)$ est donnée par

$$\int_{\partial\Omega \cap Q_r(x)} \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{x' +]-r,r[^{N-1}} \varphi(y', a(y'))\sqrt{1 + \|\nabla a(y')\|^2} \, dy'.$$

Si Ω est borné, alors $\partial\Omega$ est un compact de $\mathbb{R}^N$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, on peut alors recouvrir $\partial\Omega$ par un nombre fini de cubes $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$(pour $i = 1, \ldots, m$) qui satisfont les propriétés ci-dessus. Soit $\theta_1, \ldots, \theta_m$ est une partition de l'unité associée à $Q_1, \ldots, Q_m$:

— pour tout $1 \leq i \leq m$, $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \theta_i \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathrm{Supp}(\theta_i) \subset Q_i$;

— $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$ sur $\partial\Omega$.

Alors, si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, est une fonction continue dans un voisinage de $\partial\Omega$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial\Omega \cap Q_i} \theta_i \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

5.3 Formule de Gauss-Green

Le résultat suivant est une version N-dimensionnelle de la formule d'intégration par parties, bien connue en dimension 1.

Théorème 5.3.1. (Formule de Gauss-Green) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\int_\Omega \mathrm{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{5.3.1}$$

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$,

$$\int_\Omega \nabla f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{5.3.2}$$

Démonstration. Nous démontrons seulement la formule (5.3.2).

Etape 1. On suppose ici que $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$. Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset]-R, R[^N$. Comme f est à support dans Ω, on peut l'étendre par zéro à tout $]-R, R[^N$ en une fonction (toujours notée f) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[^N$. D'après le Théorème de Fubini, on a alors que pour tout $1 \leq j \leq N$,

$$\int_\Omega \partial_j f\, dx = \int_{]-R,R[^N} \partial_j f\, dx = \int_{]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{R} \partial_j f \, dx_j \right) dx_1 \cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_N.$$

Or

$$\int_{-R}^{R} \partial_j f\, dx_j = f(x_1, \dots, x_{j-1}, R, x_{j+1}, \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, -R, x_{j+1}, \dots, x_N) = 0$$

car $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega \subset]-R, R[^N$. Par conséquent, comme $f = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \nabla f\, dx = 0 = \int_{\partial\Omega} f\nu\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Etape 2. Soit $x \in \partial\Omega$, $r > 0$, $Q := Q_r(x)$ et $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R})$ comme dans la Définition 5.2.1. Plaçons nous dans la base $\{e_1, \dots, e_N\}$ donnée par la paramétrisation locale de $\partial\Omega$. On note alors $\partial_i f = \nabla f \cdot e_i$ la dérivée dans la direction e_i de sorte que $\nabla f = \sum_{i=1}^N (\partial_i f) e_i$. Montrons que

$$\int_\Omega \nabla f(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} f\nu\, d\mathcal{H}^{N-1} \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}^1_c(Q).$$

Tout d'abord, on a d'après le Théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_N f(y)\, dy &= \int_{x'+]-r,r[^{N-1}} \left(\int_{-r}^{a(y')} \partial_N f(y', y_N)\, dy_N \right) dy' \\ &= \int_{x'+]-r,r[^{N-1}} f(y', a(y'))\, dy' = \int_{\partial\Omega \cap Q} f\nu_N\, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} f\nu_N\, d\mathcal{H}^{N-1}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $j \neq N$, et $y' \in x' +]-r, r[^{N-1}$, on a que

$$\partial_j \left(\int_{-r}^{a(y')} f(y', y_N)\, dy_N \right) = f(y', a(y'))\partial_j a(y') + \int_{-r}^{a(y')} \partial_j f(y', y_N)\, dy_N.$$

On intègre à présent par rapport à $y' \in x' + \,]-r, r[^{N-1}$. Comme $f = 0$ sur ∂Q, le Théorème de Fubini montre que le membre de gauche s'annule et donc que

$$0 = \int_{x'+\,]-r,r[^{N-1}} f(y', a(y'))\partial_j a(y')\, dy' + \int_{x'+\,]-r,r[^{N-1}} \left(\int_{-r}^{a(y')} \partial_j f(y', y_N)\, dy_N \right) dy',$$

soit

$$\int_\Omega \partial_j f(y)\, dy = \int_{\partial\Omega \cap Q} f\nu_j \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} f\nu_j \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Etape 3. Soit $Q_1, \ldots, Q_m$ un recouvrement de $\partial\Omega$ par des cubes satisfaisant les propriétés de la Définition 5.2.1. Soit $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{\Omega, Q_1, \ldots, Q_m\}$ de $\overline{\Omega}$:
— $\theta_0, \ldots, \theta_m \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \theta_i \le 1$ pour tout $0 \le i \le m$;
— $\mathrm{supp}(\theta_0) \subset \Omega$, $\mathrm{supp}(\theta_i) \subset Q_i$ pour tout $1 \le i \le m$;
— $\sum_{i=0}^m \theta_i = 1$ sur $\overline{\Omega}$.
Comme $f = \sum_{i=0}^m \theta_i f$ dans Ω, on a que

$$\int_\Omega \nabla f(x)\, dx = \int_\Omega \nabla(\theta_0 f)\, dx + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega \cap Q_i} \nabla(\theta_i f)\, dx.$$

D'après l'étape 1, du fait que $\mathrm{supp}(\theta_0 f) \subset \Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla(\theta_0 f)\, dx = 0. \tag{5.3.3}$$

Si $1 \le i \le m$, comme $\theta_i f \in \mathcal{C}_c^1(Q_i)$, on peut appliquer l'étape 2 pour obtenir que

$$\int_\Omega \nabla(\theta_i f)\, dx = \int_{\partial\Omega} \theta_i f \nu \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{5.3.4}$$

En regroupant (5.3.3) et (5.3.4), il vient

$$\int_\Omega \nabla f\, dx = \sum_{i=0}^m \int_\Omega \nabla(\theta_i f)\, dx = \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega} \theta_i f\nu \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} f\nu\, d\mathcal{H}^{N-1},$$

où l'on a utilisé le fait que, sur $\partial\Omega$, $\theta_0 = 0$ et donc $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$. □