Université Paris-Saclay L3 Magistère

Analyse, Mesure & Géométrie

Partiel (13/03/2024)

— *Durée : 3 heures*

— *Les notes de cours, les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés*

— *Dans un même exercice, pour traiter une question, on peut admettre les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés*

— *La note tiendra compte de la qualité de la rédaction*

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème d'existence et d'unicité de la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^N$.
2. Démontrer l'unicité de la mesure de Lebesgue en dimension $N = 1$.

Exercice 2. Soit X un ensemble non vide. On définit $\mu^*(A) = 1$ si $\emptyset \neq A \subset X$ et $\mu^*(\emptyset) = 0$.

1. Rappeler la définition d'une mesure extérieure.
2. Montrer que μ^* est une mesure extérieure.
3. Rappeler la définition d'un ensemble μ^*-mesurable. Quelle propriété générale possède la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables ?
4. Montrer que $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique et μ^* une mesure extérieure sur X telle que les Boréliens sont μ^*-mesurables. Soient A et $B \subset X$ tels que $d = \mathrm{dist}(A, B) > 0$.

1. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
2. Montrer que
$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap U) + \mu^*((A \cup B) \setminus U).$$
3. En déduire que $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
4. Interpréter ce résultat au regard d'un théorème du cours.

Exercice 4. L'objectif de cet exercice est de construire une partie de $\mathbf{R}$ non Borélienne mais qui est Lebesgue mesurable. On rappelle que l'ensemble de Cantor, noté $C \subset [0, 1]$, est un ensemble compact de mesure de Lebesgue nulle qui peut être caractérisé de la manière suivante :

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} : \ \{x_k\}_{x \in \mathbf{N}} \in \{0, 2\}^{\mathbf{N}} \right\}.$$

On définit la fonction $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ par $\varphi(1) = 1$ et, si $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \in [0, 1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x_k}{3^k},$$

où $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$ désigne le développement de x en base 2.

1. Montrer que φ est strictement croissante.
2. En déduire que φ réalise une bijection de $[0,1]$ dans C.
3. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}([0,1])$, on a $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}([0,1])$.
4. Soit $V \subset [0,1]$ l'ensemble de Vitali. Montrer que $\varphi(V) \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ mais que $\varphi(V) \notin \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Exercice 5. L'objectif de cet exercice est de montrer que les notions d'intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident en un certain sens sur la classe des fonctions Riemann intégrables.

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbf{R}$. On rappelle que $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que $\phi = c_i$ est constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i \leq N-1$ (on pose $\phi(b) = c_{N-1}$). On définit alors l'intégrale de Riemann de ϕ par

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(x_{i+1} - x_i).$$

1) Montrer que

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \int_{[a,b]} \phi\,d\mathcal{L}^1,$$

où le membre de droite désigne l'intégrale de ϕ au sens de Lebesgue.

2) Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions en escalier. Montrer que $\max\{\phi_1, \phi_2\}$ et $\min\{\phi_1, \phi_2\}$ sont des fonctions en escaliers.

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ bornée est intégrable au sens de Riemann s'il existe deux suites $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ et $\{\psi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions en escaliers telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[a,b]$ et

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx \in \mathbf{R}.$$

La valeur commune s'appelle l'intégrale au sens de Riemann de f sur $[a,b]$ et est notée

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Soient donc f, $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ et $\{\psi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ comme ci-dessus. On pose

$$\alpha_n = \max_{0 \leq k \leq n} \phi_k, \quad \beta_n = \min_{0 \leq k \leq n} \psi_k.$$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, α_n et β_n sont des fonctions en escalier satisfaisant

$$\phi_n \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq f \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \psi_n \quad \text{sur } [a,b].$$

4) On pose $\alpha = \sup_n \alpha_n$ et $\beta = \inf_n \beta_n$. Montrer que α et β sont deux fonctions Boréliennes telles que $\alpha \leq f \leq \beta$ sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \phi_n(x)\,dx \leq \int_{[a,b]} \alpha\,d\mathcal{L}^1 \leq \int_{[a,b]} \beta\,d\mathcal{L}^1 \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx.$$

5) En déduire que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} \alpha\, d\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} \beta\, d\mathcal{L}^1.$$

6) On pose $\chi = \beta - \alpha$. Montrer que χ est une fonction Borélienne positive telle que $\mathcal{L}^1(\{\chi \neq 0\}) = 0$.

7) Montrer alors qu'il existe une fonction Borélienne $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ telle que $f = g$ $\mathcal{L}^1$-presque partout sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} g\, d\mathcal{L}^1.$$