Université Paris-Saclay L3 Magistère
Analyse, Mesure & Géométrie
Partiel (12/03/2025)

- *Durée : 3 heures*
- *Les notes de cours, les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés*
- *Dans un même exercice, pour traiter une question, on peut admettre les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés*
- *La note tiendra compte de la qualité de la rédaction*

Exercice 1. Soit λ une mesure de Radon sur $\mathbf{R}$ invariante par translation. Par la suite, on notera $c = \lambda([0,1])$.

1. Montrer que
$$\sum_{r \in \mathbf{Q} \cap [0,1]} \lambda(\{r\}) \leq c < \infty.$$
2. En déduire que $\lambda(\{0\}) = 0$, puis que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right) = \frac{c}{n}.$$
4. Montrer que pour tout p, $q \in \mathbf{N}^*$,
$$\lambda\left(\left[0, \frac{p}{q}\right[\right) = \frac{cp}{q}.$$
5. Montrer que pour tout α, $\beta \in \mathbf{Q}$ tels que $\alpha < \beta$,
$$\lambda([\alpha, \beta[) = c(\beta - \alpha).$$
6. Montrer que pour tout a, $b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$,
$$\lambda(]a, b[) = c(b - a).$$
7. En déduire que $\lambda = c\mathcal{L}^1$ sur $\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

Exercice 2. Soit X un ensemble et μ^* une mesure extérieure sur X. On dit que μ^* est une *mesure extérieure régulière* si pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, il existe un ensemble μ^*-mesurable B tel que $A \subset B$ et $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

Soit $\{A_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{P}(X)$ telle que $A_k \subset A_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On souhaite montrer que

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu^*(A_k). \qquad (1)$$

1. Expliquer pourquoi la propriété (1) n'est pas évidente.

2. Montrer que la limite $\lim_k \mu^*(A_k)$ existe et que
$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k\right) \geq \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k).$$
3. Soit $B_k \supset A_k$ un ensemble μ^*-mesurable tel que $\mu^*(A_k) = \mu^*(B_k)$. On pose $C_k = \bigcap_{j\geq k} B_j$. Montrer que C_k est μ^*-mesurable, $A_k \subset C_k$ et $\mu^*(A_k) = \mu^*(C_k)$.
4. Montrer que $C_k \subset C_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et que
$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} C_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(C_k).$$
5. En déduire que
$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k\right) \leq \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k).$$

On se place dorénavant dans $X = \mathbf{R}^N$. On dit qu'une mesure extérieure μ^* sur $\mathbf{R}^N$ est une *mesure extérieure Borel régulière* si les Boréliens sont μ^*-mesurables, $\mu^*(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^N$ et pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ tel que $A \subset B$ et $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

6. Donner un exemple de mesure extérieure Borel régulière.

On souhaite montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) : \ U \text{ ouvert}, \ A \subset U\}. \tag{2}$$

7. Expliquer pourquoi la propriété (2) n'est pas évidente.
8. Montrer que
$$\mu^*(A) \leq \inf\{\mu^*(U) : \ U \text{ ouvert}, \ A \subset U\}.$$
9. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ tel que $A \subset B$ et $\mu^*(A) = \mu^*(B)$. Pourquoi a-t-on
$$\mu^*(B) = \inf\{\mu^*(U) : \ U \text{ ouvert}, \ B \subset U\} \ ?$$
10. En déduire que
$$\mu^*(A) \geq \inf\{\mu^*(U) : \ U \text{ ouvert}, \ A \subset U\}.$$

Exercice 3. Le but de cet exercice est de redémontrer l'existence de la mesure produit. Il faudra donc bien prendre garde à ne pas utiliser de résultats d'intégration relatifs au théorème de Fubini. Les questions dont les numéros sont suivis d'un astérisque sont des questions difficiles.

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. On supposera pour simplifier que μ et ν sont des mesures finies. Pour tout $S \subset X \times Y$, on définit

$$\lambda^*(S) := \inf\left\{\sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(A_i)\nu(B_i) : \quad A_i \in \mathcal{A}, \ B_i \in \mathcal{B}, \ S \subset \bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i \times B_i\right\}.$$

1. Montrer que λ^* est une mesure extérieure sur $X \times Y$.
2. Montrer que $\lambda^*(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.
3. Soient $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$, $\{B_i\}_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $A \times B \subset \bigcup_i (A_i \times B_i)$.

(a) Montrer que $\mathbf{1}_{A\times B} \le \sum_i \mathbf{1}_{A_i\times B_i}$ sur $X\times Y$.

(b) En déduire que $\nu(B)\mathbf{1}_A \le \sum_i \nu(B_i)\mathbf{1}_{A_i}$ sur X, puis que $\mu(A)\nu(B) \le \sum_i \mu(A_i)\nu(B_i)$.

(c) Conclure que $\lambda^*(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Soient $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$. On souhaite montrer que $A\times B$ est λ^*-mesurable. Commençons par introduire certaines notations. On note

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \{A\times B,\ A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\}, \qquad \mathcal{P} = \left\{\bigcup_{j\in\mathbf{N}}(A_j\times B_j):\ A_j\in\mathcal{A},\ B_j\in\mathcal{B}\right\}.$$

Soit enfin $\mathcal{F}$ la collection des parties $S\subset X\times Y$ telles que $x\in X\mapsto \mathbf{1}_S(x,y)$ est μ-intégrable pour tout $y\in Y$, et $y\in Y\mapsto \int_X \mathbf{1}_S(x,y)\,d\mu(x)$ est ν-intégrable. Pour $S\in\mathcal{F}$, on pose

$$\rho(S) = \int_Y \left[\int_X \mathbf{1}_S(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

4. Montrer que si $\{S_j\}_{j\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{F}$ est tel que $\bigcup_j S_j\in\mathcal{F}$ et $S_i\cap S_j=\emptyset$ pour tout $i\neq j$, alors

$$\rho\left(\bigcup_{j\in\mathbf{N}} S_j\right) = \sum_{j\in\mathbf{N}}\rho(S_j).$$

5. Montrer que $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$ et que $\rho(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$ pour tout $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$.
6. Montrer que si $A_1,\ A_2\in\mathcal{A}$ et $B_1,\ B_2\in\mathcal{B}$, on a

$$\begin{cases}(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2),\\ (A_1\times B_1)\setminus(A_2\times B_2) = ((A_1\setminus A_2)\times B_1)\cup((A_1\cap A_2)\times(B_1\setminus B_2).\end{cases}$$

7*. En déduire que si $R=\bigcup_j(A_j\times B_j)\in\mathcal{P}$, alors il existe $A'_j\in\mathcal{A}$ et $B'_j\in\mathcal{B}$ tels que

$$\bigcup_{j\in\mathbf{N}}(A_j\times B_j) = \bigcup_{j\in\mathbf{N}}(A'_j\times B'_j),\quad (A'_i\times B'_i)\cap(A'_j\times B'_j)=\emptyset \text{ pour tout } i\neq j.$$

8*. Montrer alors que $\mathcal{P}\subset\mathcal{F}$ et, avec les notations de la question précédente,

$$\rho(R) = \sum_{j\in\mathbf{N}}\mu(A'_j)\nu(B'_j) \le \sum_{j\in\mathbf{N}}\mu(A_j)\nu(B_j).$$

9*. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que

$$\lambda^*(S) = \inf\{\rho(R):\ S\subset R,\ R\in\mathcal{P}\}.$$

10. Soient $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, $E\subset X\times Y$ et $R\in\mathcal{P}$ tels que $E\subset R$. Montrer que $R\setminus(A\times B)$ et $R\cap(A\times B)$ sont des éléments de $\mathcal{P}$ et que

$$\lambda^*(E\cap(A\times B)) + \lambda^*(E\setminus(A\times B)) \le \rho(R\cap(A\times B)) + \rho(R\setminus(A\times B)) = \rho(R).$$

11. En déduire que

$$\lambda^*(E\cap(A\times B)) + \lambda^*(E\setminus(A\times B)) \le \lambda^*(E).$$

12. Soit $\mathcal{T}$ la tribu sur $X\times Y$ engendrée par $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Montrer que λ^* est une mesure sur $\mathcal{T}$.