TD1: Mesures, mesures extérieures

Exercice 1 (Lemme d'Urysohn). Soient K un compact et V un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tels que $K \subset V$.

1. Montrer que
$$d := \inf_{x \in K, y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x - y\| > 0.$$
2. Construire un ouvert borné U tel que $K \subset U \subset \overline{U} \subset V$.
3. En déduire l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.

Exercice 2. (Partition de l'unité continue) Soient $V_1, \ldots, V_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$.

1. Construire des compacts $K_1, \ldots, K_n$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$ et $K_i \subset V_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
2. Construire des ouverts bornés $U_1, \ldots, U_n$ tels que $K_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset V_i$.
3. En déduire l'existence de fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$,
$$0 \leq \sum_{i=1}^n f_i \leq 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$
et
$$\sum_{i=1}^n f_i = 1 \quad \text{sur } K.$$

Exercice 3. Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$.

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un Borélien de mesure finie. Montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{1}_A - h| \, d\mu \leq \varepsilon.$$
2. Soit s une fonction étagée, positive, Borélienne et μ-intégrable. Montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que
$$\int_{\mathbb{R}^N} |s - h| \, d\mu \leq \varepsilon.$$
3. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction positive, Borélienne et μ-intégrable. Montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que
$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - h| \, d\mu \leq \varepsilon.$$
4. En déduire que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^1_\mu(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 4. Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X.

1. Montrer qu'un ensemble $A \subset X$ est μ^*-mesurable si et seulement si
$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$
pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$.
2. Montrer que si $A \subset X$ est tel que $\mu^*(A) = 0$, alors A est μ^*-mesurable.

Exercice 5 **(Méthode I de Carathéodory).** Soit X un ensemble et $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection de parties de X telle que $\emptyset$ et $X \in \mathscr{C}$. Soit $\zeta : \mathscr{C} \to [0, +\infty]$ telle que $\zeta(\emptyset) = 0$, on associe une application d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ en posant
$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \zeta(A_i) : \ A_i \in \mathscr{C},\ A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}.$$

1. Montrer que μ^* est une mesure extérieure.
2. On suppose que ζ est dénombrablement sous-additive, i.e. pour tout ensemble $A \in \mathscr{C}$ et toute suite d'ensembles $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{C}$ tels que $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$,
$$\zeta(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \zeta(A_i).$$
Montrer alors que $\mu^*(A) = \zeta(A)$ pour tout $A \in \mathscr{C}$.

Exercice 6 **(Méthode II de Carathéodory).** Soit (X, d) un espace métrique, $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ une collection de parties de X telle que $\emptyset$ et $X \in \mathscr{C}$ et $\delta > 0$. Soit $\zeta : \mathscr{C} \to [0, +\infty]$ telle $\zeta(\emptyset) = 0$, on associe une application d'ensembles $\phi_\delta : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ en posant
$$\phi_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \zeta(A_i) : \ A_i \in \mathscr{C},\ A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i,\ \mathrm{diam}(A_i) \leq \delta \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que ϕ_δ est une mesure extérieure.
2. Montrer que si $\delta_1 \leq \delta_2$, alors $\phi_{\delta_1} \geq \phi_{\delta_2}$. En déduire que
$$\phi = \sup_{\delta > 0} \phi_\delta = \lim_{\delta \to 0} \phi_\delta$$
définit également une mesure extérieure.