TD2: Mesure de Lebesgue

Exercice 1. (Intégrale de Riemann) Dans tout cet exercice, les intégrales considérées sont des intégrales au sens de Riemann. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$.
2. Pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, on définit
$$F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) := \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)\, dt.$$
Montrer que $F_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^{N-1})$.
3. Pour tout $i \in \mathbb{Z}^N$, on pose $P_i^k := 2^{-k}i + [0, 2^{-k}]^N$. On définit les suites
$$I_k := \sum_{i \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{2^{kN}} f\left(\frac{i}{2^k}\right), \quad I'_k := \sum_{i \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{2^{kN}} m_i^k, \quad I''_k := \sum_{i \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{2^{kN}} M_i^k,$$
où $m_i^k = \min_{P_i^k} f$ et $M_i^k = \max_{P_i^k} f$.
   (a) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$I_k = \sum_{i \in \{-2^{k_0+k}, \dots, 2^{k_0+k}\}^N} \frac{1}{2^{kN}} f\left(\frac{i}{2^k}\right)$$
   et
$$I'_k = \sum_{i \in \{-2^{k_0+k}, \dots, 2^{k_0+k}\}^N} \frac{1}{2^{kN}} m_i^k, \quad I''_k = \sum_{i \in \{-2^{k_0+k}, \dots, 2^{k_0+k}\}^N} \frac{1}{2^{kN}} M_i^k.$$
   (b) En déduire que les suites $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(I'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
   (c) Montrer que la suite $(I'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(I''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (d) Montrer qu'il existe $I \in \mathbb{R}$ tel que $I_k \to I$, $I'_k \to I$ et $I''_k \to I$.

   La valeur de la limite ci-dessus, sera notée
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx$$
   et n'est autre que l'intégrale de f au sens de Riemann sur $\mathbb{R}^N$.
4. Montrer que
$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_N)\, dx_N \right) dx_{N-1} \right) \cdots dx_2 \right) dx_1,$$
où l'ordre d'intégration peut être arbitrairement changé.
5. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$,
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x+a)\, dx.$$

Exercice 2 (Volume de la boule unité). On note $(\mathbb{R}^N, |\cdot|)$ l'espace Euclidien usuel de dimension N et $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < r\}$ la boule Euclidienne de rayon $r > 0$. On va calculer le volume ω_N de la boule unité $B(0,1)$ à l'aide de la fonction Γ. On rappelle que pour $s > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2}\, dx = \pi^{\frac{N}{2}}$.
2. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^N(\{x \in \mathbb{R}^N : \ e^{-|x|^2} > t\})\, dt\,.$$
3. Montrer que la mesure extérieure de Lebesgue est homogène de degré N.
4. En déduire que
$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx = \omega_N \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{N}{2}}\, dt\,.$$
puis que $\omega_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$.
5. Montrer que pour $s > 1$, on a $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$. En déduire par récurrence la valeur de $\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)$, pour tout entier naturel N, puis que
$$\omega_N = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & \text{si} \quad N = 2k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} & \text{si} \quad N = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble tel que $\mathcal{L}^N_*(E) < \infty$.

1. Montrer que E est $\mathcal{L}^N_*$-mesurable si et seulement s'il existe un ensemble A, qui est une union dénombrable de fermés (un ensemble F_σ), et un ensemble B qui est une intersection dénombrable d'ouverts (un ensemble G_δ), tels que $A \subset E \subset B$ et $\mathcal{L}^N(B \setminus A) = 0$.
2. En déduire que la tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ des ensembles $\mathcal{L}^N_*$-mesurables peut être décrite par
$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N) = \{A \cup Z : \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\, \mathcal{L}^N_*(Z) = 0\}.$$

Exercice 4. (Ensemble triadique de Cantor) On pose $C_0 := [0,1]$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{n+1} = \frac{C_n}{3} \cup \frac{2 + C_n}{3}.$$

1. Faire un dessin pour représenter les premières itérations de C_n.
2. Montrer par récurrence que $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n et composé de 2^n intervalles disjoints de longueur 3^{-n} ayant pour extrémités les 2^{n+1} points de la forme
$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n}, \qquad \text{avec } x_k \in \{0,2\} \text{ pour tout } 1 \le k \le n \text{ et } \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

4. On définit l'ensemble de Cantor par
$$C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$
Montrer que C est un compact d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue nulle.
5. Montrer que
$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} : \quad x_k \in \{0,2\} \text{ pour tout } k \geq 1 \right\}.$$
6. Montrer que C n'est pas dénombrable (en fait, C a la puissance du continu).

Exercice 5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\,dt & \text{si } x \geq 0, \\ \displaystyle -\int_{[x,0]} f(t)\,dt & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $a < b$,
$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$
2. En déduire que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est dérivable presque partout et que $F' = f$ p.p. dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$,
$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx.$$