Correction partiel

Exercice

λ mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ tq $\lambda(x+A) = \lambda(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall x \in \mathbb{R}$

① $c = \lambda([0,1]) < \infty$ car λ est finie sur les compacts et $[0,1]$ compact

Comme $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est dénombrable,

$$\sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \lambda(\{r\}) = \lambda\Big(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \{r\}\Big)$$

$$= \lambda(\mathbb{Q}\cap[0,1]) \leq \lambda([0,1]) \leq c < \infty.$$

② Si $\lambda(\{r\}) > 0 \Longrightarrow \lambda(\{0\}) = \lambda(r+\{0\}) = \lambda(\{r\}) > 0$

$\Longrightarrow \lambda(\{0\})\,\mathrm{Card}(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = \infty$ ce qui est impossible d'après la question ①. Donc $\lambda(\{r\}) = 0$

Par suite $\lambda(\{x\}) = \lambda(x+\{0\}) = \lambda(\{0\}) = 0$

③ $$[0,1[= \bigcup_{k=0}^{n-1} \underbrace{\Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big[}_{\text{disjoints deux à deux}}$$

$$\Longrightarrow c = \lambda([0,1]) = \lambda([0,1[) = \lambda\Big(\bigcup_{k=0}^{n-1}\Big[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\Big[\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda\Big(\Big[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\Big[\Big) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda\Big(\frac{k}{n}+\Big[0,\frac{1}{n}\Big[\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda\Big(\Big[0,\frac{1}{n}\Big[\Big) = n\,\lambda\Big(\Big[0,\frac{1}{n}\Big[\Big)$$

Donc $\lambda\Big(\Big[0,\frac{1}{n}\Big[\Big) = \frac{c}{n}$.

④ $$\Big[0,\frac{p}{q}\Big[= \bigcup_{k=0}^{p-1} \underbrace{\Big[\frac{k}{q},\frac{k+1}{q}\Big[}_{\text{disjoints deux à deux}}$$

$$\lambda\left([0,\tfrac{p}{q}[\right) = \lambda\left(\bigcup_{k=0}^{p-1}\left[\tfrac{k}{q},\tfrac{k+1}{q}\right[\right) = \lambda\left(\bigcup\right.$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda\left(\left[\tfrac{k}{q},\tfrac{k+1}{q}\right[\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda\left([0,\tfrac{1}{q}[\right)$$

$$= p\,\frac{c}{q}$$

(5) $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}$ $\alpha < \beta$.

Il existe $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ $(p_1 < p_2)$, $q \in \mathbb{N}^*$ tq

$$\alpha = \frac{p_1}{q},\quad \beta = \frac{p_2}{q}$$

$$\lambda([\alpha,\beta[) = \lambda\left(\left[\tfrac{p_1}{q},\tfrac{p_2}{q}\right[\right) = \lambda\left(\tfrac{p_1}{q} + \left[0,\tfrac{p_2-p_1}{q}\right[\right) =$$

$$= \lambda\left(\left[0,\tfrac{p_2-p_1}{q}\right[\right) = c\,\frac{p_2-p_1}{q} = c\,(\beta-\alpha)$$

(6) $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

$$\exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \quad \text{tq} \quad a_n \downarrow a$$

$$\exists\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \quad \text{tq} \quad b_n \nearrow b.$$

Pour n assez grand $a_n < b_n$. De plus

$([a_n,b_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante

tq $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n[=]a,b[$. Donc

$$\lambda(]a,b[) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n[\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda([a_n,b_n[) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} c\,(b_n-a_n) = c\,(b-a)$$

(7) On a montré que

$$\lambda(]a,b[) = c\,(b-a) = c\,\mathcal{L}^1(]a,b[)\quad \forall\, a<b.$$

D'après le corollaire du théorème de la classe monotone, on en déduit que

$$\lambda(A) = c\,\mathcal{L}^1(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Exercice

① La propriété (1) est satisfaite pour les mesures mais pas forcément pour les mesures extérieures.

② $A_k \subset A_{k+1} \Longrightarrow \mu^*(A_k) \leq \mu^*(A_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Donc la suite $(\mu^*(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissant et la limite $\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k)$ existe dans $[0,+\infty]$.

Comme $A_k \subset \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A_\ell \quad \forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(A_k) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A_\ell\Big) \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A_\ell\Big).$$

③ Comme la classe des ensembles μ^*-mesurables est une tribu (Thm de Carathéodory), si B_j est μ^*-mesurable, alors $C_k = \bigcap_{j\geq k} B_j$ est μ^*-mesurable.

$\forall j \geq k$, on a $A_k \subset A_j \subset B_j$. donc

$$A_k \subset \bigcap_{j\geq k} B_j = C_k \subset B_k$$

d'où $\mu^*(A_k) \leq \mu^*(C_k) \leq \mu^*(B_k) = \mu^*(A_k)$

$\Longrightarrow \mu^*(A_k) = \mu^*(C_k)$.

④ Si $x \in C_k$, alors $x \in B_j \quad \forall j \geq k$

$\Longrightarrow x \in B_j \quad \forall j \geq k+1$

$\Longrightarrow x \in C_{k+1}$

Donc $C_k \subset C_{k+1}$

(C_k) est une suite croissante d'ensemble μ^*-mesurables et la restriction de μ^* à la tribu des ensemble μ^*-mesurables est une mesure (Thm de Carathéodory)

Donc
$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(C_k)$$

(5) $A_k \subset C_k \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ et donc

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(C_k) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k)$$

(6) La mesure extérieure de Lebesgue est une mesure extérieure Borel régulière (cf TD2, Ex(3), question (1))

(8) Si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ et U ouvert tq $A \subset U$, alors
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(U)$$
$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \inf\{\mu^*(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\}.$$

(7) C'est la propriété de régularité extérieure pour les mesures de Radon. Ici μ^* est juste une mesure extérieure et A est une partie quelconque de $\mathbb{R}^N$

(9) Comme les Boréliens sont μ^*-mesurables et $\mu^*(K) < \infty$ pour tout compact, le Thm de Carathéodory montre que la restriction de μ^* aux Boréliens est une mesure de Radon. Par régularité extérieure d'une mesure de Radon, si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$,
$$\mu^*(B) = \inf\{\mu^*(U),\ U \text{ ouvert},\ U \supset B\}$$

(10) $$\mu^*(A) = \mu^*(B) = \inf\{\mu^*(U),\ U \text{ ouvert},\ U \supset B\}$$
$$\geq \inf\{\mu^*(U),\ U \text{ ouvert},\ U \supset A\}$$
(car $A \subset B$).

Exercice

① * $\mu(\phi) = \nu(\phi) = 0 \implies \lambda^*(\phi) = 0$

* $S \subset T$, $A_i \in \mathcal{A}_i$, $B_i \in \mathcal{B}$ tq $T \subset \bigcup A_i \times B_i$

$\implies S \subset \bigcup A_i \times B_i$

$\implies \lambda^*(S) \leq \sum_i \mu(A_i)\nu(B_i)$

Par passage à l'inf, $\lambda^*(S) \leq \lambda^*(T)$

* Soit $\{S_n\}$ une suite de $\mathcal{P}(X \times Y)$

Si $\sum_n \lambda^*(S_n) = +\infty$, alors

$$\lambda^*(\bigcup_n S_n) \leq \sum_n \lambda^*(S_n)$$

Si $\sum_n \lambda^*(S_n) < \infty$, alors $\lambda^*(S_n) < \infty \quad \forall n$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_i^n \in \mathcal{A}$, $B_i^n \in \mathcal{B}$ tq $S_n \subset \bigcup_i A_i^n \times B_i^n$ et

$$\sum_i \mu(A_i^n)\nu(B_i^n) \leq \lambda^*(S_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i^n \times B_i^n)$

$$\implies \lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n) \leq \sum_n \sum_i \mu(A_i^n)\nu(B_i^n)$$

$$\leq \sum_n \left[\lambda^*(S_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(S_n) + \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0 \implies \lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(S_n)$

② $(A_0, B_0) = (A, B)$ $\quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$.

$(A_i, B_i) = (\phi, \phi) \quad \forall i \geq 1$

$\implies \lambda^*(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B)$

③ $A \times B \subset \bigcup (A_i \times B_i)$

a) Si $(x,y) \notin A \times B \Rightarrow \mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = 0 \leq \sum_i \mathbb{1}_{A_i \times B_i}(x,y)$

Si $(x,y) \in A \times B$, alors $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ tq $(x,y) \in A_{i_0} \times B_{i_0}$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = 1 = \mathbb{1}_{A_{i_0}\times B_{i_0}}(x,y)$$

$$\leq \sum_i \mathbb{1}_{A_i \times B_i}(x,y).$$

b) On intègre par rapport à ν en la variable y. Par convergence monotone,

$$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{A\times B}(x,y)$$
$$\leq \sum_i \mathbb{1}_{A_i\times B_i}(x,y)$$
$$= \sum_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\mathbb{1}_{B_i}(y)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{1}_A(x)\nu(B) = \mathbb{1}_A(x)\int_Y \mathbb{1}_B \, d\nu$$
$$\leq \int_Y \sum_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\mathbb{1}_{B_i}(y)\, d\nu(y)$$
$$= \sum_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\int_Y \mathbb{1}_{B_i} d\nu = \sum_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\,\nu(B_i)$$

On intègre ensuite par rapport à μ en la variable x. De nouveau par convergence monotone,

$$\mu(A)\nu(B) = \int_X \mathbb{1}_A \, d\mu \, \nu(B)$$
$$\leq \int_X \sum_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu\, \nu(B_i) = \sum_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} d\mu\, \nu(B_i)$$
$$= \sum_i \mu(A_i)\nu(B_i)$$

c) Par passage à l'inf par rapport à (A_i, B_i), on obtient
$$\mu(A)\nu(B) \leq \lambda^*(A\times B)$$

(4) $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$, $S := A\times B$

$$\mathbb{1}_S(x,y) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)$$

$x\mapsto \mathbb{1}_A(x)$ est μ-intégrable donc $x\mapsto \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)$ est μ intégrable et

$$y\longmapsto \int_X \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)\,d\mu(x) = \mu(A)\,\mathbb{1}_B(y) \text{ est } \nu\text{-intégrable.}$$

De plus $\rho(A\times B) = \int_Y [\mu(A)\,\mathbb{1}_B(y)]\,d\nu(y) = \mu(A)\nu(B)$

(5) $(x,y)\in(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)$

$$\iff \begin{cases}(x,y)\in A_1\times B_1\\ \text{et}\\ (x,y)\in A_2\times B_2\end{cases} \iff \begin{cases}x\in A_1\cap A_2\\ \text{et}\\ y = B_1\cap B_2\end{cases}$$

Donc $(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2) = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$

$(x,y)\in(A_1\times B_1)\setminus(A_2\times B_2)$

$$\iff \begin{cases}(x,y)\in A_1\times B_1\\ \text{et}\\ (x,y)\notin A_2\times B_2\end{cases} \iff \begin{cases}(x,y)\in A_1\times B_1 \text{ et } \cancel{x}\in A_2 \text{ et } y\notin B_2\\ \text{ou}\\ (x,y)\in A_1\times B_1 \text{ et } x\notin A_2\end{cases}$$

$$\iff (x,y)\in[(A_1\cap A_2)\times(B_1\setminus B_2)]\cup[(A_1\setminus A_2)\times B_1].$$

Donc $(A_1\times B_1)\setminus(A_2\times B_2) = [(A_1\cap A_2)\times(B_1\setminus B_2)]\cup[(A_1\setminus A_2)\times B_1]$

(6) $(\tilde{A}_0\times\tilde{B}_0) = (A_0\times B_0)$

$(\tilde{A}_1\times\tilde{B}_1) = (A_1\times B_1)\setminus(A_0\times B_0)$ est une union finie de produits cartésiens de $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ deux à deux disjoints d'après la question (5). Donc

$$(A_0\times B_0)\cup(A_1\times B_1) = \bigcup_{i=0}^{2}(A'_i\times B'_i) \quad \text{avec } \begin{array}{l}A'_i\in\mathcal{A}\\ B'_i\in\mathcal{B}\end{array}$$

$(A'_i\times B'_i)\cap(A'_j\times B'_j) = \emptyset \quad \forall i\neq j.$

Par récurrence, supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\exists m_k \in \mathbb{N}$ tq

$$R_k := \bigcup_{j=0}^{k} (A_j \times B_j) = \bigcup_{j=0}^{m_k} (A'_j \times B'_j) \quad \text{où } A'_j \in \mathcal{A},\ B'_j \in \mathcal{B}$$

$$(A'_i \times B'_i) \cap (A'_j \times B'_j) = \phi \quad \forall i \neq j.$$

$$(A_{k+1} \times B_{k+1}) \setminus R_k = \bigcap_{j=0}^{m} \underbrace{(A_{k+1} \times B_{k+1}) \setminus (A'_j \times B'_j)}_{\text{union finie d'éléments de } \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ deux à deux disjoints}}$$

Donc $(A_{k+1} \times B_{k+1}) \setminus R_k = \bigcup_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} (A'_j \times B'_j)$

$$\Longrightarrow A_{k+1} \times B_{k+1} = \bigcup_{j=0}^{m_{k+1}} \underbrace{(A'_j \times B'_j)}_{\in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ deux à deux disjoints}}$$

Par passage à la limite qd $k \nearrow +\infty$ (

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j=0}^{k} (A_j \times B_j) \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j=0}^{m_k} (A'_j \times B'_j) \right)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \times B_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A'_j \times B'_j)$$

7 Soit $R \in \mathcal{J}$: $R = \bigcup_j (A_j \times B_j) = \bigcup_j (A'_j \times B'_j)$

Par convergence monotone,

$$\int_X \mathbb{1}_R(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \sum_j \mathbb{1}_{A'_j}(x)\,\mathbb{1}_{B'_j}(y)\,d\mu(x)$$

$$= \sum_j \mathbb{1}_{B'_j}(y)\,\mu(A'_j)$$

Si $A'_j \cap A'_i \neq \phi \Longrightarrow B'_j \cap B'_i = \phi$

On regroupe les A'_i de sorte que

$$\bigcup_i A'_i = \bigcup_i A''_i \quad , \bigcup_i B'_i = \bigcup_i B''_i$$

$$A''_i = \bigcup \{ A'_j : A'_j \cap A'_i \neq \phi \}$$

$$B''_i = \bigcup \{ B'_j : A'_j \cap A_i \neq \phi \}$$

de sorte que $A''_i \cap A''_j = \phi \quad i \neq j$

$$\Longrightarrow \int_X \mathbb{1}_R(x,y)\,d\mu(x) \leq \sum_j \mathbb{1}_{B''_j}(y)\mu(A''_j)$$

$$\leq \sum_j \mu(A''_j) \leq \mu(X) < \infty$$

Donc $\forall y \in Y$, $x \mapsto \mathbb{1}_R(x,y)$ est μ-intégrable.

Par convergence monotone,

$$\int_Y \Big[\int_X \mathbb{1}_R(x,y)\,d\mu(x) \Big] d\nu(y) = \int_Y \sum_j \mathbb{1}_{B''_j}(y)\mu(A''_j)\,d\nu(y)$$

$$= \sum_j \mu(A''_j)\nu(B''_j) \leq \nu(Y) \sum_j \mu(A''_j) = \nu(Y)\mu(X) < \infty$$

$\Longrightarrow y \mapsto \int_X \mathbb{1}_R(x,y)\,d\mu(x)$ est ν-intégrable.

Pour $R \in \mathcal{F}$.

De plus, par Fatou, (deux fois)

$$\rho(R) = \int_Y \Big[\int_X \mathbb{1}_{\cup(A_i \times B_i)}(x,y)\,d\mu(x) \Big] d\nu(y)$$

$$\leq \int_Y \Big[\int_X \sum_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\mathbb{1}_{B_i}(y)\,d\mu(x) \Big] d\nu(y)$$

$$\leq \sum_i \int_Y \Big[\int_X \mathbb{1}_{A_i}(x)\mathbb{1}_{B_i}(y)\,d\mu(x) \Big] d\nu(y)$$

$$= \sum_i \mu(A_i)\nu(B_i)$$

(8) D'après la question (7), $\forall R \in \mathcal{P}$ tq $S \subset R$
$R = \bigcup (A_j \times B_j)$

$$\inf\{\rho(R) : S \subset R, R \in \mathcal{P}\} \leq \rho(R) \leq \sum \mu(A_j)\nu(B_j)$$

Par passage à l'inf en (A_j, B_j), on obtient, par définition de λ^* que

$$\inf\{\rho(R) : S \subset R ; R \in \mathcal{P}\} \leq \lambda^*(S)$$

Si $R \in \mathcal{P}$, on peut trouver une décomposition
$$R = \bigcup (A'_i \times B'_i)$$
dont les éléments $A'_i \in \mathcal{A}$ et $B'_i \in \mathcal{B}$ satisfont
$$(A'_i \times B'_i) \cap (A'_j \times B'_j) = \phi \quad \forall i \neq j.$$
On obtient alors, par convergence monotone,
$$\rho(R) = \sum_j \mu(A'_j)\nu(B'_j) \geq \lambda^*(S)$$
$$\Longrightarrow \inf\{\rho(R) : S \subset R, R \in \mathcal{P}\} \geq \lambda^*(S)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\rho(R) &= \int_Y \left[\int_X \mathbb{1}_{\bigcup_j (A'_j \times B'_j)}(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) \\ &= \int_Y \left[\int_X \sum_j \mathbb{1}_{A'_j \times B'_j}(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) \\ &= \sum_j \int_Y \left[\int_X \mathbb{1}_{A'_j \times B'_j}(x,y)\, d\mu(x)\right] d\nu(y) \\ &= \sum_j \mu(A'_j)\nu(B'_j)\end{aligned}}$$

⑨ $R = \bigcup_j (A_j \times B_j) \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

$$R \cap (A \times B) = \bigcup_j \Big[\underbrace{(A_j \cap A)}_{\in \mathcal{A}} \times \underbrace{(B_j \cap B)}_{\in \mathcal{B}} \Big] \in \mathcal{P}$$

$$R \setminus (A \times B) = \bigcup_j \big[(A_j \times B_j) \setminus (A \times B) \big]$$

$$= \bigcup_j \Big[\underbrace{(A_j \cap A)}_{\in \mathcal{A}} \times \underbrace{(B_j \setminus B)}_{\in \mathcal{B}} \Big] \cup \bigcup_j \Big[\underbrace{(A_j \setminus A)}_{\in \mathcal{A}} \times \underbrace{B_j}_{\in \mathcal{B}} \Big]$$

d'après la question ⑥

$\in \mathcal{P}$

Comme $E \subset R$

$$E \cap (A \times B) \subset R \cap (A \times B) \in \mathcal{P}$$
$$E \setminus (A \times B) \subset R \setminus (A \times B) \in \mathcal{P}$$

D'après la question ⑧

$$\lambda^* (E \cap (A \times B)) + \lambda^* (E \setminus (A \times B))$$
$$\leq \rho (R \cap (A \times B)) + \rho (R \setminus (A \times B)) = \rho(R)$$

car $[R \cap (A \times B)] \cap [R \setminus (A \times B)] = \emptyset$

⑩ Par passage à l'inf en R, on en déduit de nouveau d'après la question ⑧ que

$$\lambda^*(E \setminus (A \times B)) + \lambda^*(E \cap (A \times B)) \leq \lambda^*(E).$$

⑪ Par sous-additivité de λ^*, on a toujours l'autre inégalité donc $A \times B$ est μ^*-mesurable

$$\Longrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$$

Donc la tribu ~~engendrée~~ par $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (souvent notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$) est incluse dans $\mathcal{G}$.

La restriction de λ^* à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est souvent notée $\mu \otimes \nu$. C'est la mesure produit de μ et ν.