

**Leçon 226 (Suites vectorielles et réelles
définies par une relation de récurrence
 $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Application
à la résolution approchée d'équations)**

Exercice 1. (Méthode de gradient à pas fixe) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2. \quad (1)$$

On suppose que f admet un unique point de minimum global sur $\mathbb{R}^n$ (*pourquoi ?*), noté $\bar{x}$, que l'on cherche à approcher à l'aide d'une méthode itérative. On définit la méthode gradient à pas fixe par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné,} \\ x_{k+1} = x_k - \rho \nabla f(x_k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où $\rho > 0$ est fixé.

1. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|. \quad (2)$$

Montrer que si $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M}$, alors il existe une constante $\tau(\rho) \in]0, 1[$ telle que

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \tau(\rho)^k \|x_0 - \bar{x}\|$$

et en déduire que $x_k \rightarrow \bar{x}$.

2. Pour quelle valeur de ρ la convergence est-elle la plus rapide ?

On se propose d'améliorer ce résultat dans le cas particulier de la fonctionnelle quadratique définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f satisfait les propriétés (1) et (2) avec $\alpha = \lambda_1$ et $M = \lambda_n$, où $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A .
2. En déduire la valeur optimale de ρ pour avoir la meilleure convergence possible de la méthode de gradient à pas fixe.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \mu(\rho)^k \|x_0 - \bar{x}\|,$$

où $\mu(\rho) = \max\{|1 - \rho\lambda_1|, |1 - \rho\lambda_n|\}$.

4. Montrer que $\mu(\rho) \in]0, 1[$ si et seulement si $\rho \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$ et déterminer la valeur optimale de ρ qui rend la convergence la plus rapide possible.
5. Conclure.