

Chapitre 2

Espaces de fonctions continues

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à montrer des propriétés topologiques d'espaces de fonctions continues d'un espace métrique (X, d) dans \mathbb{R} . On notera

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$$

et

$$\mathcal{C}_b(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue et bornée}\}.$$

Les espaces $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}_b(X)$ sont clairement des espaces vectoriels et la quantité

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est finie quelque soit $f \in \mathcal{C}_b(X)$. On montre aisément qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{C}_b(X)$, ce qui fait de $(\mathcal{C}_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ un espace vectoriel normé.

2.1 Complétude de $\mathcal{C}_b(X)$

Proposition 2.1.1. *L'espace $\mathcal{C}_b(X)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_b(X)$ est complet. Pour ce faire, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_b(X)$ et montrons qu'elle converge uniformément sur X vers une fonction $f \in \mathcal{C}_b(X)$. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$ et pour tout $x \in X$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} complet, ce qui assure l'existence d'un nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} . Par passage à la limite quand $m \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédente, puis par passage au sup en x , il vient pour tout $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui assure que f_n converge uniformément vers f sur X . De plus, l'inégalité précédente montre que $\|f\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon < \infty$, ce qui assure que f est bornée. Il reste à montrer

que la fonction f est continue. Pour ce faire, on utilise la continuité de f_N qui assure, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que si $y \in X$ et $d(x, y) \leq \delta$, alors $|f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon$. D'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(y)| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre bien la continuité de f en x et donc que $f \in \mathcal{C}_b(X)$. \square

Remarque 2.1.2. En vertu de la Proposition 1.2.7, si (X, d) est un espace métrique compact, on a que $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_b(X)$. Dans ce cas, $\mathcal{C}(X)$ est un espace de Banach.

2.2 Séparabilité de $\mathcal{C}(X)$

Le Théorème de Weierstrass qui affirme que toute fonction continue sur un intervalle compact de \mathbb{R} peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynômiales. Le Théorème de Stone-Weierstrass donne une généralisation de ce résultat au cas des fonctions continues $\mathcal{C}(X)$ sur un espace métrique compact (X, d) , vu comme une algèbre de Banach muni du produit ponctuel des fonctions. Ce résultat de portée générale donne une caractérisation des sous-algèbres \mathcal{A} de $\mathcal{C}(X)$ qui sont denses dans $\mathcal{C}(X)$. Nous nous concentrons ici juste sur la condition suffisante.

Théorème 2.2.1 (Stone-Weierstrass). *Soient (X, d) un espace métrique compact et \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$. On suppose que*

- \mathcal{A} contient les constantes ;
- \mathcal{A} sépare les points, i.e., pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Alors \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Nous commençons par montrer le résultat suivant d'approximation polynômiale de la fonction racine carrée.

Lemme 2.2.2. *Il existe une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée.*

Démonstration. On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{cases} P_0(x) = 0, \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est polynômiale. Montrons par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0, 1]$. En effet, cette propriété est claire pour $n = 0$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Alors, $P_{n+1}(x) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x)) \\ &\leq P_n(x) + (\sqrt{x} - P_n(x)) \\ &\leq \sqrt{x}, \end{aligned}$$

car $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $\sqrt{x} + P_n(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$ pour tout $x \in [0, 1]$. On en déduit que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante en majorée. Elle converge pontuellement vers une limite $\ell(x) \geq 0$ qui satisfait $\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2)$, i.e. $\ell(x) = \sqrt{x}$.

Montrons à présent que la convergence est uniforme. Pour ce faire, on remarque que $x \mapsto \sqrt{x} - P_n(x)$ est continue sur $[0, 1]$. D'après la Proposition 1.2.7, il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que

$$\max_{x \in [0, 1]} (\sqrt{x} - P_n(x)) = \sqrt{x_n} - P_n(x_n).$$

Comme $[0, 1]$ est compact, il existe une sous suite $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\bar{x} \in [0, 1]$ tels que $x_{\sigma(n)} \rightarrow \bar{x}$. En utilisant le fait que la suite de fonctions $(\sqrt{\cdot} - P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [0, 1]} (\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_m(x_{\sigma(n)})) \\ &= \sqrt{\bar{x}} - P_m(\bar{x}). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $m \rightarrow +\infty$, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [0, 1]} (\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) = 0.$$

Enfin, en utilisant de nouveau le fait que la suite de fonction $(\sqrt{\cdot} - P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, il vient $\|\sqrt{\cdot} - P_n\|_{\infty} \rightarrow 0$. \square

On montre à présent que toute sous-algèbre (fermée) de fonctions continues est stable par passage au maximum et minimum.

Corollaire 2.2.3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 2.2.1, si f et $g \in \overline{\mathcal{A}}$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Démonstration. Par continuité de la somme et du produit, on en déduit que si \mathcal{A} est une algèbre, il en est de même pour $\overline{\mathcal{A}}$. Si $\|f - g\|_{\infty} = 0$, alors $\max(f, g) = \min(f, g) = f = g \in \overline{\mathcal{A}}$. On suppose donc désormais que $\|f - g\|_{\infty} > 0$. On remarque tout d'abord que, du fait que

$$\max(f, g) := \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ et } \min(f, g) := \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

il suffit de montrer que $|f - g| \in \overline{\mathcal{A}}$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômiales construite au Lemme 2.2.2. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre, il vient

$$P_n \left(\frac{(f - g)^2}{\|f - g\|_{\infty}^2} \right) \|f - g\|_{\infty} \in \overline{\mathcal{A}}$$

et d'après le Lemme 2.2.2,

$$P_n \left(\frac{(f - g)^2}{\|f - g\|_{\infty}^2} \right) \|f - g\|_{\infty} \rightarrow |f - g| \quad \text{uniformément sur } X.$$

Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermée, on en déduit que $|f - g| \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc que $\max(f, g)$ et $\min(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$. \square

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le Théorème de Stone-Weierstrass.

Démonstration du Théorème 2.2.1. La preuve est divisée en quatre étapes.

Etape 1 : Pour tout $x, y \in X$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, si $\alpha = \beta$, il suffit de considérer la fonction constante égale à $\alpha = \beta$. Par ailleurs, si $\alpha \neq \beta$, alors par hypothèse, il existe une fonction $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Dans ce cas, la fonction

$$f := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x)),$$

appartient à \mathcal{A} et satisfait $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Etape 2 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X)$, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f^x dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, d'après l'étape 1, pour tout $y \in X$, il existe une fonction $f_y^x \in \mathcal{A}$ telle que $f_y^x(x) = h(x)$ et $f_y^x(y) = h(y)$. Comme h et f_y^x sont continues, il existe $r_y^x > 0$ tel que pour tout $z \in B(y, r_y^x)$,

$$|f_y^x(z) - f_y^x(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(y) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Du fait que $f_y^x(y) = h(y)$, on en déduit que $f_y^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in B(y, r_y^x)$. Comme

$$X \subset \bigcup_{y \in X} B(y, r_y^x),$$

par compacité de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{B(y_i, r_{y_i}^x)\}_{1 \leq i \leq l}$. D'après le Corollaire 2.2.3, la fonction

$$f^x := \min_{1 \leq i \leq l} f_{y_i}^x$$

appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ et elle satisfait $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 3 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, soient $x \in X$ et f^x la fonction construite à l'étape 2. Les fonctions f^x et h étant continues, il existe $r'_x > 0$ tel que pour tout $z \in B(x, r'_x)$,

$$|f^x(z) - f^x(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(z) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $f^x(x) = h(x)$, on en déduit que $f^x(z) > h(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in B(x, r'_x)$. On utilise de nouveau la compacité de X pour extraire du recouvrement ouvert $\{B(x, r'_x)\}_{x \in X}$ de X un sous-recouvrement fini $\{B(x_j, r'_{x_j})\}_{1 \leq j \leq m}$. On introduit la fonction

$$f := \max_{1 \leq j \leq m} f^{x_j}$$

qui appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ en vertu du Corollaire 2.2.3, et qui satisfait $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Étape 4 : D'après l'étape 3, pour tout $h \in \mathcal{C}(X)$ il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f_n \rightarrow h$ uniformément sur X . Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermé, on en déduit que $h \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X)$. \square

Nous donnons à présent quelques conséquences du théorème de Stone-Weierstrass.

Corollaire 2.2.4. *Soit K un compact de \mathbb{R}^N . Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$, il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients réels qui converge uniformément vers f sur K .*

Démonstration. L'algèbre $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômiales à coefficients réels contient les fonctions constantes et sépare clairement les points. En effet, si x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $x_0 \neq y_0$, alors la fonction affine $f : x \mapsto (x - x_0) \cdot (x_0 - y_0) + (x - y_0) \cdot (x_0 - y_0)$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ et satisfait $f(x_0) = \|x_0 - y_0\|^2 \neq -\|x_0 - y_0\|^2 = f(y_0)$ (car $\|x_0 - y_0\| \neq 0$). La conclusion suit du Théorème de Stone-Weierstrass. \square

Corollaire 2.2.5. *Soit K un compact de \mathbb{R}^N . Alors l'espace $\mathcal{C}(K)$ est séparable.*

Démonstration. D'après le Corollaire 2.2.4, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}(K)$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{R}[X]$ est séparable pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. On note \mathbf{P}_n (resp. \mathbf{Q}_n) l'ensemble des polynômes à coefficients réels (resp. rationnels) de degré inférieur ou égal à n . L'espace \mathbf{P}_n étant un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $d = \dim(\mathbf{P}_n)$, on en déduit que \mathbf{P}_n est isomorphe à \mathbb{R}^d . Comme \mathbb{Q}^d est dénombrable et dense dans \mathbb{R}^d et \mathbf{Q}_n est isomorphe à \mathbb{Q}^d , il s'ensuit que \mathbf{Q}_n est dénombrable et dense dans \mathbf{P}_n pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$ (on utilise ici le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Enfin comme $\mathbb{R}[X] = \bigcup_n \mathbf{P}_n$ et $\mathbb{Q}[X] := \bigcup_n \mathbf{Q}_n$, on en déduit que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}[X]$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. \square

En général l'espace $\mathcal{C}_b(X)$ n'est pas séparable comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 2.2.6. Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on considère l'espace $\mathcal{C}_b(]a, b[)$. Nous allons montrer que $\mathcal{C}_b(]a, b[)$ n'est pas séparable. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $a_n \rightarrow a$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $b_n \rightarrow b$. On pose $x_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ et on considère une fonction $\varphi_n \in \mathcal{C}_c(]a, b[)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n(x_n) = 1$ et $\text{Supp}(\varphi_n) \subset]a_{n+1}, a_n[$. En notant $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de \mathbb{N} , on pose pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\varphi_A := \sum_{n \in A} \varphi_n.$$

Comme $\text{Supp}(\varphi_n) \cap \text{Supp}(\varphi_m) = \emptyset$ dès que $n \neq m$, la somme définissant φ_A est toujours localement finie même si A est infini. Par conséquent, φ_A est continue et $0 \leq \varphi_A \leq 1$, ce qui montre que $\varphi_A \in \mathcal{C}_b(]a, b[)$.

Supposons que $\mathcal{C}_b(]a, b[)$ est séparable. Considérons une famille $D = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui est dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_b(]a, b[)$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on considère le plus petit entier $k_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

On définit ainsi une application $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ qui à toute partie A de \mathbb{N} associe $\Phi(A) := k_A$. Notons que si A et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont tels que $A \neq B$, alors (quitte à échanger les rôles de A et B) il existe $n_0 \in A \setminus B$ et donc

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \geq |\varphi_A(x_{n_0}) - \varphi_B(x_{n_0})| = \varphi_A(x_{n_0}) = 1.$$

Par conséquent, si $k_A = k_B$, on aurait par inégalité triangulaire

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \leq \|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty + \|\varphi_B - f_{k_B}\|_\infty < 1,$$

ce qui est absurde. On a donc montré que si $A \neq B$, alors $k_A \neq k_B$ ce qui établit l'injectivité de l'application Φ , et donc que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans \mathbb{N} ce qui est impossible car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable.¹

2.3 Critère de compacité

Nous établissons pour finir un critère de compacité dans l'espace $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 2.3.1 (Ascoli-Arzelà). *Soient (X, d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ telle que*

- i) (bornitude) pour tout $x \in X$, il existe $M(x) > 0$ telle que $\sup_n |f_n(x)| \leq M(x)$;*
- ii) (uniforme équi-continuité) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$,*

$$d(x, y) \leq \delta \quad \implies \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telles que $f_{\sigma(n)}$ converge uniformément vers f sur X .

Réciproquement, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ uniformément convergente, alors elle est bornée et uniformément équi-continue.

Démonstration. L'espace métrique (X, d) étant compact, la Proposition 1.2.9 assure qu'il est séparable. Il existe donc un sous-ensemble D dénombrable et dense dans X .

Etape 1 : Définition de la fonction f sur D . L'ensemble D étant dénombrable, on peut énumérer ses éléments en une suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$. D'après la propriété de bornitude i), pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(f_n(a_j))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonal de sous-suite. Pour $j = 0$, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(f_{\sigma_0(n)}(a_0))_{n \in \mathbb{N}}$ et $f(a_0) \in \mathbb{R}$ tels que $f_{\sigma_0(n)}(a_0) \rightarrow f(a_0)$. Pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $f(a_0), \dots, f(a_k) \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_j}(a_j) \rightarrow f(a_j) \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq k.$$

1. Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il existerait une bijection $\Psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $E = \{n \in \mathbb{N} : n \notin \Psi(n)\}$. Par surjectivité de Ψ , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Psi(n_0) = E$. Si $n_0 \in E$, alors par définition de E on aurait $n_0 \notin \Psi(n_0) = E$ ce qui est impossible. Si $n_0 \notin E$, alors toujours par définition de E , on aurait $n_0 \in \Psi(n_0) = E$ ce qui est de nouveau impossible.

La suite $(f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_k(n)}(a_{k+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass permet de nouveau d'extraire une sous-suite notée $(f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \sigma_{k+1}(n)}(a_{k+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un $f(a_{k+1}) \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_{\sigma(n)} := f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_n(n)}$$

de sorte que $(f_{\sigma(n)}(a_k))_{n \geq k}$ est une sous-suite de $(f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_k(n)}(a_k))_{n \geq k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\sigma(n)}(a_k) = f(a_k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \quad (2.3.1)$$

Etape 2 : Convergence simple. Montrons que pour tout $x \in X$, la suite $(f_{\sigma(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} . Soient ε et δ comme dans la définition de l'uniforme équi-continuité. Par densité de D dans X , il existe un $a \in D$ tel que $d(x, a) \leq \delta$. Par conséquent, pour tout n et $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| &\leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a)| + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| + |f_{\sigma(m)}(a) - f_{\sigma(m)}(x)| \\ &\leq 2\varepsilon + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)|. \end{aligned}$$

Comme $a \in D$, d'après l'étape 1, la suite numérique $(f_{\sigma(n)}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donc est de Cauchy. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a $|f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| \leq \varepsilon$, ce qui implique que

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci montre effectivement que $(f_{\sigma(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} et donc il existe un $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_{\sigma(n)}(x) \rightarrow f(x)$.

Etape 3 : Uniforme continuité de f . D'après la propriété d'uniforme équi-continuité de f_n , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ avec $d(x, y) \leq \delta$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(y)| \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien l'uniforme continuité de f sur X .

Etape 4 : Convergence uniforme. Soient ε et δ donnés par la propriété ii). Par compacité de X , il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_{N_\varepsilon} \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(a_i, \delta/2)$. Donc si $x \in X$, il existe $i \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $x \in B(a_i, \delta/2)$ et

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| &\leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a_i)| + |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N_\varepsilon} |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et l'uniforme continuité de f établie à l'étape 3. D'après l'étape 2, on en déduit que $|f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ dès lors

que $n \geq n_i$ (qui ne dépend que de ε et de a_i). En notant $n_\varepsilon := \max\{n_1, \dots, n_{N_\varepsilon}\}$, il vient : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in X$. On en déduit la convergence uniforme de $f_{\sigma(n)}$ vers f sur X .

Etape 5 : Réciproque. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}(X)$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$ pour tout $n \geq N$. Comme les fonctions f, f_0, \dots, f_N sont continues sur le compact X , elles sont uniformément continues d'après le Théorème de Heine. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $\delta_0, \dots, \delta_N > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$\begin{cases} d(x, y) \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ d(x, y) \leq \delta_i \implies |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N. \end{cases}$$

On définit $\delta := \min(\eta, \delta_0, \dots, \delta_N)$ de sorte que si x et $y \in X$, alors

$$d(x, y) \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient finalement que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien uniformément équi-continue. \square