Chapitre 3

Mesures de Radon

L'objet de ce chapitre consiste à identifier le dual topologique de certains espaces de fonctions continues. La connaissance du dual d'un espace fonctionnel est d'une importance capitale en analyse fonctionnelle comme nous le verrons ultérieurement au Chapitre 7. Cela permet notamment d'introduire des topologies affaiblies (par rapport à la topologie forte de la norme) grâce auxquelles on augmente le nombre de compact.

3.1 Compléments sur les espaces de fonctions continues

Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Si $K \subset \Omega$ est un compact, on note

$$\mathcal{C}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \ \mathrm{Supp}(f) \subset K\},$$

où $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}}$ désigne le support de f. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega)$, ce qui en fait donc un espace de Banach. On note également

$$\mathcal{C}_c(\Omega) \quad \bigcup_{K \subset \Omega \text{ compact}} \mathcal{C}_K(\Omega)$$

l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans Ω. Cet espace n'est pas fermé dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.1. En dimension $N = 1$, on pose $\Omega = \,]-1,1[$ et, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-1,-1+\frac{1}{n}[\,\cup\,]1-\frac{1}{n},1[, \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ \frac{2n}{2-n}(x-1+\frac{1}{n}) & \text{si } x \in \,]\frac{1}{2},1-\frac{1}{n}[, \\ \frac{2n}{n-2}(x+1-\frac{1}{n}) & \text{si } x \in \,]-1+\frac{1}{n},-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Clairement $f_n \in \mathcal{C}_c(]0,1[)$ et $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \text{si } x \in \,]\frac{1}{2},1[, \\ 2(x+1) & \text{si } x \in \,]-1,-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Or $\mathrm{Supp}(f) = [0,1]$ ce qui montre que $f \notin \mathcal{C}_c(]0,1[)$.

On note $\mathcal{C}_0(\Omega)$ la fermeture de l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$. Nous allons caractériser l'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 sur le bord de Ω. Avant cela, il convient de rappeler le résultat suivant qui sera utile par la suite.

Lemme 3.1.2 (Urysohn). *Soient K un compact et V un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ tels que $K \subset V$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.*

Démonstration. Soit

$$d := \inf_{x \in K, y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x - y\| = \inf_{x \in K} \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V),$$

où

$$\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V) := \inf_{y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x - y\|.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V)$ étant continue (en fait elle est même 1-Lipschitz) et K étant compact, il existe $\bar{x} \in K$ tel que $d = \mathrm{dist}(\bar{x}, \mathbb{R}^N \setminus V)$. Si $d = 0$, par définition de l'infimum, il existerait une suite $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus V$ telle que $\|\bar{x} - y_j\| \to 0$. L'ensemble $\mathbb{R}^N \setminus V$ étant fermé, on aurait alors $\bar{x} \in \mathbb{R}^N \setminus V$ ce qui est impossible puisque $\bar{x} \in K \subset V$. Par conséquent, $d > 0$ et l'ensemble

$$U := \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, K) < d/2\},$$

est un ouvert satisfaisant $K \subset U \subset \overline{U} \subset V$. La fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U)}{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U) + \mathrm{dist}(x, K)}$$

convient. □

Proposition 3.1.3. *Une fonction f appartient à $\mathcal{C}_0(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ tels que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K$. D'après le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Posons $h = fg$ de sorte que $h \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Réciproquement, considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, par définition il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur Ω. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty < \varepsilon/2$ et définissons $K := \{x \in \Omega : \ |f_{n_\varepsilon}| \geq \varepsilon/2\}$. Alors K est un sous ensemble compact de Ω et pour tout $x \in \Omega \setminus K$, $|f| \leq |f - f_{n_\varepsilon}| + |f_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. □

Proposition 3.1.4. *Les espaces $\mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0(\Omega)$ sont séparables.*

Démonstration. Par définition de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est séparable. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille exhaustive de compacts, i.e. $K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$ [1]. Comme $\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$, il suffit de montrer que chacun des $\mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$ est séparable (pour la norme uniforme sur Ω).

Soit donc $K \subset \Omega$ un compact et ω un ouvert borné tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Comme $\overline{\omega}$ est compact, l'espace $\mathcal{C}(\overline{\omega})$ est séparable d'après le Corollaire 2.2.5. Il existe donc une famille $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dénombrable et dense dans $\mathcal{C}(\overline{\omega})$. Soit $(r_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0. Comme $\mathcal{C}_K(\omega)$ est un sous ensemble de $\mathcal{C}(\overline{\omega})$, il existe $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell) \neq \emptyset$. Pour de tels couples (k,ℓ), on choisit arbitrairement une fonction $g_{k,\ell} \in \mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell)$ de sorte que l'ensemble (dénombrable) $D := \{g_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\omega)$ (pour la norme uniforme sur $\overline{\omega}$). En effet, pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{\ell_0} < \varepsilon/2$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_\omega |f - f_{k_0}| < r_{\ell_0}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_{k_0}, r_{\ell_0}) \neq \emptyset$ de sorte que

$$\sup_\omega |f - g_{k_0,\ell_0}| \le \sup_\omega |f - f_{k_0}| + \sup_\omega |f_{k_0} - g_{k_0,\ell_0}| \le 2r_{\ell_0} < \varepsilon.$$

Comme chacune des fonctions $g_{k,\ell}$ sont à support dans K qui est un sous-ensemble compact de ω, on peut les étendre par 0 sur $\Omega \setminus \omega$ en des fonctions $\tilde{g}_{k,\ell}$ qui sont donc dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} = \{\tilde{g}_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\Omega)$ est donc dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$ (pour la norme uniforme sur Ω). □

3.2 Mesures de Radon positives

On rappelle qu'une *mesure de Borel* sur Ω est une mesure définie sur la *tribu des Boréliens* $\mathcal{B}(\Omega)$ de Ω (la plus petite tribu contenant les ouverts de Ω et donc aussi les fermés de Ω). On appelle *mesure de Radon positive* une mesure de Borel sur Ω finie sur les compacts. Toute mesure de Radon positive μ définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω. En effet, l'intégrale

$$\int_\Omega f \, d\mu$$

est bien définie puisque, en notant $K = \mathrm{Supp}(f)$ le support (compact) de f, on a

$$\int_K |f| \, d\mu \le \mu(K) \max_K |f| < +\infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \mapsto \int_\Omega f \, d\mu$$

1. On peut par exemple consiérer $K_n = \left\{x \in \Omega : \, |x| \le n \text{ et } \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \ge \frac{1}{n}\right\}$.

définit une forme linéaire positive $\mathcal{C}_c(\Omega)$, *i.e.*,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \text{pour tout } f,\, g \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ et tout } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{3.2.1}$$

$$L(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ avec } f \geq 0. \tag{3.2.2}$$

Nous allons en fait montrer que toute forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ peut être représentée de façon unique par une telle mesure.

Théorème 3.2.1 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit $L : \mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive (i.e. qui satisfait (3.2.1) et (3.2.2)). Il existe une unique mesure de Radon positive μ sur Ω telle que*

$$L(f) = \int_\Omega f\, d\mu \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega). \tag{3.2.3}$$

De plus, pour tout $E \subset \mathcal{B}(\Omega)$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) :\ E \subset V,\ V \ \textit{ouvert}\}, \tag{3.2.4}$$

et pour tout ouvert $U \subset \Omega$,

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) :\ K \subset U,\ K \ \textit{compact}\}. \tag{3.2.5}$$

Dans la preuve de l'existence, nous utiliserons le résultat suivant.

Lemme 3.2.2 (Partition de l'unité). *Soient $V_1, \dots, V_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe des fonctions $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ sur K.*

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et une boule ouverte B_x centrée en x et telle que $\overline{B_x} \subset V_i$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$, et comme K est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j=1}^p B_{x_j}$. On définit K_i comme l'union des boules fermées $\overline{B_{x_j}}$ qui sont contenues dans V_i. Alors K_i est un compact contenu dans V_i et $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$. Soit U_i un ouvert borné tel que $K_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset V_i$, on pose alors

$$f_i(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_i)}{\mathrm{dist}(x, K) + \sum_{j=1}^n \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_j)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N,$$

qui satisfait bien les propriétés souhaitées. □

Pour tout ouvert $V \subset \Omega$, on définit

$$\mu^*(V) := \sup\{L(f) :\ f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ \mathrm{Supp}(f) \subset V\}. \tag{3.2.6}$$

Si $U \subset V$, alors $\mu^*(U) \leq \mu^*(V)$ de sorte que l'on peut étendre μ^* à n'importe quel ensemble $E \subset \Omega$ en posant

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu^*(V) :\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}.$$

La propriété de croissance de μ^* reste vraie au sens où $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ pour tout $E \subset F$.

Lemme 3.2.3. *Pour tout compact $K \subset \Omega$, on a*

$$\mu^*(K) = \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

En particulier, $\mu^*(K) < +\infty$. De plus, pour tout ouvert $U \subset \Omega$,

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) : \ K \subset U,\ K \text{ compact}\}.$$

Démonstration. Soient $K \subset \Omega$ un compact et $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Pour tout $0 < t < 1$, l'ensemble $V_t := \{g > t\}$, qui est ouvert, satisfait $K \subset V_t$ et $f \leq t^{-1}g$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V_t$. Par conséquent, la croissance de L montre que

$$\mu^*(K) \leq \mu^*(V_t) = \sup\{L(f) : \ f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]) \text{ tel que } \mathrm{Supp}(f) \subset V_t\} \leq t^{-1}L(g) < +\infty.$$

En faisant tendre $t \to 1^-$, on obtient $\mu(K) \leq L(g)$ et donc, par passage à l'infimum en g,

$$\mu^*(K) \leq \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

L'autre inégalité se montre en considérant un ouvert arbitraire $U \subset \Omega$ contenant K. Si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ est une fonction telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $f = 1$ sur K, il vient par définition de μ^* sur les ouverts que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq L(f) \leq \mu^*(U),$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à U, que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq \mu^*(K).$$

Pour établir la propriété de régularité intérieure sur les ouverts, considérons un ouvert $U \subset \Omega$. Alors, par définition de μ^* sur les ouverts, pour tout $\alpha < \mu^*(U)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $\alpha < L(f)$. Soit $K = \mathrm{Supp}(f)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Comme $f \leq g$ sur Ω, on a $L(f) \leq L(g)$, puis par passage à l'infimum par rapport à g, on obtient que $L(f) \leq \mu^*(K)$. Ceci montre l'existence d'un compact $K \subset U$ tel que $\alpha < \mu^*(K)$. □

A ce stade, nous avons défini une fonction d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ qui est finie sur les compacts, qui satisfait la propriété de régularité extérieure (3.2.4) (par définition) et la propriété de régularité intérieure (3.2.5) sur les ouverts par le Lemme 3.2.3.

Lemme 3.2.4. *La fonction d'ensemble μ^* est une mesure extérieure.*

Démonstration. On a évidemment que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et μ^* est une fonction croissante d'ensemble, *i.e.* si $E \subset E$, alors $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$. Il s'agit à présent de montrer que μ^* est dénombrablement sous-additive, *i.e.*, pour toute suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de Ω, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Montrons d'abord que si V_1 et V_2 sont des ouverts de Ω,

$$\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2). \tag{3.2.7}$$

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(g) \subset V_1 \cup V_2$. D'après le Lemme 3.2.2, il existe des fonctions f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f_1) \subset V_1$, $\mathrm{Supp}(f_2) \subset V_2$ et $f_1 + f_2 = 1$ sur $\mathrm{Supp}(g)$. Par conséquent, pour $i = 1, 2$, $f_i g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $g = f_1 g + f_2 g$ de sorte que, par linéarité de L et la définition de μ^*,

$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2).$$

Par passage au supremum en g, on obtient $\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$.

Si $\mu(E_n) = \infty$ pour un certain $n \geq 1$, alors le résultat suit. Sinon, si $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n, alors quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V_n tel que $E_n \subset V_n$ et $\mu^*(V_n) < \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$. On définit $V := \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ et on considère $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^p V_n$. En itérant (3.2.7), il vient

$$L(f) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^p V_n\right) \leq \sum_{n=1}^p \mu^*(V_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quelque soit $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, et $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset V$, on en déduit que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \leq \mu^*(V) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

ce qui montre la dénombrable sous-additivité, le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. $\square$

D'après le Théorème de Carathéodory, la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables, *i.e.*, l'ensemble des parties $A \subset \Omega$ qui satisfont

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{pour tout } E \subset \Omega$$

est une tribu sur Ω, et la restriction $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ de μ^* à cette tribu est une mesure. Nous allons montrer que $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}$.

Lemme 3.2.5. *Tout Borélien est μ^*-mesurable. En particulier, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure de Radon positive.*

Démonstration. **Etape 1 : Montrons que pour tout A, $B \subset \Omega$ avec $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, on a**

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par sous-additivité de μ^*, il suffit de montrer que $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Soit $W \subset \Omega$ un ouvert tel que $A \cup B \subset W$. Comme $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, il existe des ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V \subset W$ et $U \cap V = \emptyset$. Par définition de μ^* sur les ouverts, on a

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U \cup V) \geq \mu^*(U) + \mu^*(V) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts $W \supset A \cup B$, on obtient le résultat voulu.

Etape 2 : Montrons que tous les fermés de Ω sont μ^*-mesurables. Par sous-additivité de μ^*, il suffit d'établir que si $C \subset \Omega$ est fermé,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \setminus C) \quad \text{pour tout } A \subset \Omega \text{ tel que } \mu^*(A) < +\infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(A \setminus C_n, A \cap C) \geq 1/n > 0$, l'étape 1 montre que

$$\mu^*(A \setminus C_n) + \mu^*(A \cap C) = \mu^*((A \setminus C_n) \cup (A \cap C)) \leq \mu^*(A). \tag{3.2.8}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in A : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j - i| \geq 2$, on a toujours d'après l'étape 1,

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k} \right) \leq \mu^*(A) < +\infty,$$

et

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k+1} \right) \leq \mu^*(A) < +\infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(A) < +\infty$. Comme C est fermé, on a $A \setminus C = (A \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de μ^*,

$$\mu^*(A \setminus C_n) \leq \mu^*(A \setminus C) \leq \mu^*(A \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to +\infty$, $\mu^*(A \setminus C_n) \to \mu^*(A \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to +\infty$ dans (3.2.8), il vient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \setminus C)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Etape 3 : Conclusion. Comme $\mathcal{A}$ contient les fermés de Ω et que la tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ est engendrée par les fermés, on en déduit que $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}$. Par conséquent, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure Borélienne. Comme par le Lemme 3.2.3, on a $\mu(K) = \mu^*(K) < +\infty$ (puisque les compacts sont Boréliens, on en déduit que μ est une mesure de Radon positive. $\square$

Nous avons montré jusque là que la restriction de μ^* à la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure de Radon positive qui satisfait la propriété de régularité extérieure (3.2.4) et la propriété de régularité intérieure (3.2.5) sur les ouverts. Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve du Théorème de Représentation de Riesz.

Démonstration du Théorème 3.2.1. Concernant l'existence, nous avons montré dans les lemmes préliminaires l'existence d'une mesure de Radon positive μ satisfaisant les propriétés de régularité (3.2.4) et (3.2.5). Il reste à établir la propriété de représentation (3.2.3). Soit $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, par linéarité de L, il suffit d'établir que

$$L(f) \leq \int_\Omega f\, d\mu. \tag{3.2.9}$$

Soit $K := \mathrm{Supp}(f)$ et $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui contient $f(K)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 < a = y_1 < \cdots < y_n = b$ et $\max_{1\leq i\leq n}(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$. On définit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$B_i := f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]) \cap K.$$

Comme f est continue, les ensembles B_i constituent une partition Borélienne de K. D'après la propriété de régularité extérieure (3.2.4), il existe un ouvert V_i contenant B_i tel que $\mu(V_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$. Par ailleurs, l'ouvert $W_i = f^{-1}(]y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon[)$ contenant B_i, on obtient en posant $U_i = V_i \cap W_i$ un ouvert contenant B_i et satisfaisant

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sup_{U_i} f \leq y_i + \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Comme $\{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ est un recouvrement ouvert du compact K, le Théorème 3.2.2 montre l'existence d'une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, *i.e.*, on peut trouver des fonctions $h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ telles que $\mathrm{Supp}(h_i) \subset U_i$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K. Par conséquent, $f = \sum_{i=1}^n h_i f$ et $0 \leq h_i f \leq (y_i + \varepsilon)h_i$ dans Ω, puis par linéarité et croissance de L, il vient

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)L(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)L(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n L(h_i).$$

Comme $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ est telle que $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K, le Lemme 3.2.3 montre que

$$\sum_{i=1}^n L(h_i) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) \geq \mu(K).$$

Par ailleurs, la définition de μ^* sur les ouverts (et donc de μ) montre $L(h_i) \leq \mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$, de sorte que

$$L(f) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\left(\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) - |a|\mu(K).$$

Comme $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de K, on en déduit que

$$\begin{aligned} L(f) &\le \sum_{i=1}^n y_i \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + \mu(K)) \\ &\le \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\ &\le \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f\, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\ &= \int_\Omega f\, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)), \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.2.9), le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

Etablissons enfin l'unicité. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de Radon positives satisfaisant la conclusion du Théorème de représentation de Riesz. Par les propriétés de régularité (3.2.4) et (3.2.5), il suffit d'établir que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$ et $K \subset \Omega$ un compact. D'après (3.2.4), il existe un ouvert V contenant K tel que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$ d'où $\chi_K \le f \le \chi_V$. Il vient alors

$$\mu_1(K) = \int_\Omega \chi_K\, d\mu_1 \le \int_\Omega f\, d\mu_1 = L(f) = \int_\Omega f\, d\mu_2 \le \int_\Omega \chi_V\, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Donc $\mu_1(K) \le \mu_2(K)$ et en échangeant les rôles de μ_1 et μ_2 on en déduit que cette inégalité et une égalité. □

3.3 Mesures de Radon bornées

Définition 3.3.1. L'espace des mesures de Radon bornées sur Ω, noté $\mathcal{M}(\Omega)$, est le dual topologique de l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

Grâce au théorème de représentation de Riesz (Théorème 3.2.1), on peut caractériser l'espace de mesures de Radon bornées.

Théorème 3.3.2. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe deux mesures de Borel finies μ^+ et μ^- sur Ω telles que si μ désigne la mesure signée $\mu := \mu^+ - \mu^-$, alors*

$$L(f) = \int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f\, d\mu^+ - \int_\Omega f\, d\mu^- \qquad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

De plus, en notant $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ la mesure (positive) variation de μ, on a

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = |\mu|(\Omega).$$

Commençons par établir que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ peut s'écrire comme la différence de deux formes linéaires positives.

Lemme 3.3.3. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe des formes linéaires continues positives L^+ et L^- sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Démonstration. Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in \mathcal{C}_0(\Omega) : \ f \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}^+, \, g \leq f\}.$$

Etape 1 : *L^+ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$, comme $0 \in \mathcal{C}^+$, on a $L^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq g \leq f$. Par continuité de L, on a $L(g) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|g\|_\infty \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty$, et par passage au sup en g, on obtient que $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty < \infty$.

Etape 2 : *L^+ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. On décompose g comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \leq f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au supremum en g,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité, on se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de L^+, il existe g_1 et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq g_i \leq f_i$ et $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résultat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Etape 3 : *Définition et additivité de L^+ sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, on décompose f comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si f et $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors $(f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f + g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f + g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f + g) = L^+(f) + L^+(g)$.

Etape 4 : *L^+ est continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. Comme L^+ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Etape 5 : *L^+ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* L'additivité de L^+ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $(-f)^\pm = f^\mp$, alors $L^+(-f) = -L^+(f)$ et l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $pL^+(f) = L^+(pf) = L^+(qrf) = qL^+(rf)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de L^+ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etape 6 : *L^- est une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors L^- est clairement une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. De plus, par définition de L^+, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que L^- est également positive. □

Démonstration du Théorème 3.3.2. D'après le Lemme 3.3.3, on peut décomposer $L \in \mathcal{M}(\Omega)$ comme $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues positives sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. D'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe deux mesures de Radon positives $\mu^\pm$ telles que

$$L^\pm(f) = \int_\Omega f \, d\mu^\pm \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

De plus, par définition de $\mu^\pm$ sur les ouverts (voir (3.2.6)) et par définition de la norme dans $\mathcal{M}(\Omega)$, on a

$$\mu^\pm(\Omega) = \sup_{f \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])} L^\pm(f) \leq \|L^\pm\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < +\infty,$$

ce qui montre que $\mu^\pm$ sont des mesures finies. Par conséquent,

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu^+ - \int_\Omega f \, d\mu^- \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Cette inégalité peut être étendue à toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ par densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$, par continuité de L et par convergence dominée.

Si $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ est telle que $\|f\|_\infty \leq 1$, alors on

$$|L(f)| \leq \int_\Omega |f| \, d|\mu| \leq |\mu|(\Omega),$$

puis par passage au supremum par rapport à f, $\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq |\mu|(\Omega)$. Réciproquement, par définition de $\mu^\pm$ sur les ouverts, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonction $f^\pm \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telles que $\mu^\pm(\Omega) \leq L^\pm(f^\pm) + \varepsilon$, d'où

$$|\mu|(\Omega) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) \leq L^+(f^+) + L^-(f^-) + 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, par définition de L^+, il existe $g^+ \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $0 \leq g^+ \leq f^+$ et $L^+(f^+) \leq L(g^+) + \varepsilon$. Par ailleurs, comme

$$L^-(f^-) = L^+(f^-) - L(f^-) = \sup_{h \in \mathcal{C}_0(\Omega),\, 0 \leq h \leq f^-} L(h) - L(f^-) = \sup_{g \in \mathcal{C}_0(\Omega),\, 0 \leq g \leq f^-} \{-L(g)\},$$

il existe $g^- \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $0 \leq g^- \leq f^-$ et $L^-(f^-) \leq -L(g^-) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$|\mu|(\Omega) \leq L(g^+ - g^-) + 4\varepsilon$$

et comme $-1 \leq -f^- \leq -g^- \leq g^+ - g^- \leq g^+ \leq f^+ \leq 1$, on en déduit que

$$|\mu|(\Omega) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + 4\varepsilon$$

et la conclusion vient du fait que $\varepsilon > 0$ est arbitraire. $\square$