Chapitre 4

Espaces de Lebesgue

On rappelle qu'une *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur un ensemble X est une famille $\mathcal{A}$ de parties de X vérifiant :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

Une *mesure* (positive) est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui satisfait

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

Pour les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ on munit implicitement l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi, f est $\mathcal{A}$-mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ce qui est encore équivalent à $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$.

4.1 Premières définitions et propriétés

Définition 4.1.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \ \mathcal{A}\text{-mesurable} : \ \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < +\infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : \ \mu(\{|f| > C\}) = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Commençons par établir deux inégalités fondamentales en théorie de l'intégration.

Proposition 4.1.2 (Inégalité de Hölder). *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ et*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}.$$

Démonstration. Par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$, pour $a, b > 0$ et $1 \leq p, p' < \infty$ avec $1/p + 1/p' = 1$, on a

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(a^{p'}) \leq \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right).$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient l'*inégalité de Young*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

qui reste vraie pour tout $a \geq 0$ et $b \geq 0$. En prenant $a = |f(x)|/\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ et $b = |g(x)|/\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}$ et en intégrant sur X, on obtient l'inégalité voulue.

Dans l'un des cas $p = 1$ ou $p = \infty$, le résultat est immédiat par définition du sup-essentiel. □

Proposition 4.1.3 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout f, $g \in \mathcal{L}^p(X)$, on a*

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}.$$

Démonstration. On commence par le cas $p = \infty$. Par définition du sup-essentiel, $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ et $|g(x)| \leq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ pour μ-presque tout $x \in X$, d'où

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)},$$

pour μ-presque tout $x \in E$, et donc $\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$.

Si $p = 1$, on a

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_E |f + g|\, d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)\, d\mu \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(X)}.$$

Enfin, si $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
\|f + g\|^p_{\mathcal{L}^p(X)} &= \int_E |f + g|^p\, d\mu = \int_X |f + g||f + g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leq \int_X |f||f + g|^{p-1}\, d\mu + \int_X |g||f + g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \left(\int_X (|f + g|^{p-1})^{p/(p-1)}\, d\mu\right)^{(p-1)/p} \\
&= (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \|f + g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(X)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat. □

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ satisfait l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\|0\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$. Malheureusement, $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$ n'implique pas forcément que $f = 0$, ce qui montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ (c'est en fait une semi-norme). En effet, on a le résultat suivant qui caractérise toutes les fonctions de semi-norme nulle :

Proposition 4.1.4. *Soit $f : X \to [0, +\infty[$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable telle que*

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

Alors $f(x) = 0$ μ-presque pour tout $x \in X$.

Démonstration. On considère les ensembles mesurables $E_n := \{f \geq 1/n\}$. La suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu = 0,$$

et donc, $\mu(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage à la limite que

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0,$$

ce qui montre bien que $f = 0$ μ-p.p. dans X. $\square$

Etant données deux fonctions $\mathcal{A}$-mesurables f et $g : X \to [-\infty, +\infty]$, on dit que $f \sim g$, si $f(x) = g(x)$ μ-presque pour tout $x \in X$. On peut montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) dans la classe des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables. Les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ peuvent être rendus normés en considérant l'espace quotient $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ noté dorénavant $L^p(X)$. Si $f \in \mathcal{L}^p(E)$, on notera (temporairement) $[f]$ sa classe d'équivalence et par définition de la norme dans un espace quotient, on a

$$\|[f]\|_{L^p(X)} = \inf_{f\in[f]} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \quad \text{pour tout } f \in [f].$$

Par abus de notation, nous identifierons systématiquement une fonction avec sa classe d'équivalence.

Définition 4.1.5. Soit $f \in L^p(X)$, on note

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les inégalités de Hölder et Minkowski restent vraies dans les $L^p(X)$.

Proposition 4.1.6 (Inégalité de Hölder). *Soient $1 \le p \le \infty$ et $p' \ge 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^{p'}(X)$ alors $fg \in L^1(X)$ et*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposition 4.1.7 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1 \le p \le \infty$ et tout f, $g \in L^p(X)$, on a*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proposition 4.1.8. *Pour tout $1 \le p \le \infty$, l'application $L^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_p$ définit une norme sur $L^p(X)$. De plus, pour $p = 2$, l'application*

$$(f, g) \in L^2(X) \times L^2(X) \mapsto \langle f, g\rangle := \int_X fg \, d\mu.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(X)$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.1.4, si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ μ-p.p. dans X, et donc $f = 0$ dans $L^p(X)$. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(X)$. Enfin l'inégalité triangulaire n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Si $p = 2$, l'inégalité de Hölder (Cauchy-Schwarz dans ce cas) assure que l'intégrale $\int_X fg \, d\mu$ est bien définie pour f et $g \in L^2(X)$. De plus, il s'agit clairement d'une forme bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) symétrique définie positive (d'après la Proposition 4.1.4) ce qui assure que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est effectivement un produit scalaire sur $L^2(X)$. $\square$

4.2 Complétude

Théorème 4.2.1 (Riesz-Fischer). *Pour tout $1 \le p \le \infty$, l'espace $L^p(X)$ est complet.*

Démonstration. Supposons d'abord que $1 \le p < \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Grâce à la propriété de Cauchy, on construit par récurrence une sous-suite $(f_{n_j})_{j\ge1}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \le 2^{-j} \quad \text{pour tout } j \ge 1.$$

Soit $u_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, alors la suite $(u_k)_{k\ge1}$ est croissante et

$$\|u_k\|_p \le \sum_{j=1}^k 2^{-j} \le 1.$$

Par conséquent, le théorème de la convergence monotone assure que

$$\int_X |u|^p \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X |u_k|^p \, d\mu \le 1,$$

où l'on a posé $u := \lim_k u_k = \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, ce qui montre que $u(x) < \infty$ pour μ-presque tout $x \in X$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big) & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| < +\infty, \\ 0 & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| = +\infty \end{cases}$$

La fonction f ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable et comme la somme

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big)$$

se téléscope, on en déduit que $f_{n_j} \to f$ μ-p.p. dans X. De plus, le lemme de Fatou assure que

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \int_X |f_{n_1}|^p \, d\mu + \int_X \liminf_{k\to+\infty} |u_k|^p \, d\mu \leq \int_X |f_{n_1}|^p \, d\mu + 1 < \infty,$$

ce que assure que $f \in L^p(X)$. Comme $|f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + u \in L^p(X)$, le théorème de la convergence dominée montre que $f_{n_j} \to f$ dans $L^p(X)$. Montrons que toute la suite $f_n \to f$ dans $L^p(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le critère de Cauchy, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$. Soit j assez grand de sorte que $n_j \geq N$, alors il vient que

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f\|_p \leq \varepsilon + \|f_{n_j} - f\|_p.$$

En faisant tendre $j \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on obtient la convergence souhaitée.

Pour $p = \infty$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(X)$, alors il existe un ensemble μ-négligeable $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad \text{pour tout } x \in X \setminus A \text{ et tout } m, n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.1}$$

Donc si $x \in X\setminus A$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, elle admet donc une limite notée $f(x)$. Par ailleurs, on pose $f(x) = 0$ si $x \in A$. La fonction f ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables. De plus, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(X)$ elle est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc par passage à la limite dans la première inégalité de (4.2.1), il vient $|f(x)| \leq M$ μ-presque pour tout $x \in X$ soit $f \in L^\infty(X)$. Enfin d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc par passage à la limite dans la deuxième inégalité de (4.2.1), il vient $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et μ-presque tout $x \in X$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que $f_n \to f$ dans $L^\infty(X)$. □

Corollaire 4.2.2. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach et $L^2(X)$ est un espace de Hilbert.*

4.3 Résultats de densité

Théorème 4.3.1. *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *l'ensemble des fonctions étagées est dense dans* $L^p(X)$.

Démonstration. Soit $f \in L^p(X)$, en décomposant $f = f_+ - f_-$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $f \geq 0$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions étagées définies de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$, on définit les ensembles $\mathcal{A}$-mesurables

$$E_{n,k} := \left\{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \quad F_n := \{f \geq n\}.$$

et pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{E_{n,k}}(x) + n\chi_{F_n}(x).$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge μ-presque partout vers f.

Si $p = \infty$, alors pour tout $n \geq \|f\|_\infty$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ presque pour tout $x \in X$, et donc $\|f_n - f\|_\infty \leq 2^{-n} \to 0$.

Si $1 \leq p < \infty$, comme $f_n(x) \nearrow f(x)$ pour presque tout $x \in E$, on en déduit que $|f(x) - f_n(x)|^p \to 0$ et $|f(x) - f_n(x)|^p \leq 2^p f(x)^p$ μ-presque pour tout $x \in X$, d'où par le théorème de la convergence dominée $\|f - f_n\|_p \to 0$. □

Dans la suite, nous allons nous restreindre au cas de la mesure de Lebesgue, notée $\mathcal{L}^N$. Afin de montrer un résultat de densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue, nous aurons besoin d'une propriété de régularité de la mesure de Lebesgue.

Proposition 4.3.2. *Soit* $E \subset \mathbb{R}^N$ *un ensemble Borélien, alors*

$$\mathcal{L}^N(E) = \inf\{\mathcal{L}^N(U) : U \text{ ouvert avec } E \subset U\} = \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}.$$

Démonstration. La régularité extérieure

$$\mathcal{L}^N(E) = \inf\{\mathcal{L}^N(U) : U \text{ ouvert avec } E \subset U\}$$

est une conséquence immédiate de la construction de la mesure de Lebesgue.

Montrons maintenant la régularité intérieure

$$\mathcal{L}^N(E) = \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}.$$

On a toujours que $\mathcal{L}^N(E) \geq \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}$. Pour établir la deuxième inégalité, on applique la régularité extérieure à l'ensemble borné $\overline{B}(0,n) \setminus E$, où $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors un ensemble ouvert $V_n \supset \overline{B}(0,n) \setminus E$ tel que $\mathcal{L}^N(V_n) \leq \mathcal{L}^N(\overline{B}(0,n)\setminus E)+\varepsilon$. Soit $F_n := V_n^c$ qui est un fermé satisfaisant $F_n \subset E \cup \overline{B}(0,n)^c$ et

$$\mathcal{L}^N((E\setminus F_n)\cap\overline{B}(0,n)) = \mathcal{L}^N((V_n\setminus(E^c))\cap\overline{B}(0,n)) = \mathcal{L}^N(V_n\cap\overline{B}(0,n)) - \mathcal{L}^N(\overline{B}(0,n)\setminus E) \leq \varepsilon.$$

On pose $K_n = F_n \cap \overline{B}(0,n)$ qui est un ensemble compact satisfaisant $K_n \subset E$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^N(E \cap \overline{B}(0,n)) &= \mathcal{L}^N((E \setminus F_n) \cap \overline{B}(0,n)) + \mathcal{L}^N(K_n) \leq \mathcal{L}^N(K_n) + \varepsilon \\ &\leq \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Comme par ailleurs, $\mathcal{L}^N(E \cap \overline{B}(0,n)) \to \mathcal{L}^N(E)$ on obtient la deuxième inégalité en faisant tendre $n \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$. □

Cette propriété de régularité de la mesure de Lebesgue permet de montrer la densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue pour $p < \infty$.

Théorème 4.3.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega)$. D'après le Théorème 4.3.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée g telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. On est donc ramené à montrer que toute fonction étagée à support compacte peut être approchée par une fonction de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la norme $L^p(\Omega)$.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Le Théorème de la convergence dominée assure que $\|g - \chi_{K_n} g\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $g = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$.

Par linéarité, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable A tel que $\overline{A}$ est compact et $\overline{A} \subset \Omega$ (autrement dit χ_A est à support compact dans Ω). En particulier, comme A est borné, on a $\mathcal{L}^N(A) < +\infty$. Par conséquent la Proposition 4.3.2 assure, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un ouvert U et d'un compact K tels que $K \subset A \subset U$ et $\mathcal{L}^N(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Le Lemme d'Urysohn donne alors l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $h = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(h) \subset U$. D'où, comme $\chi_K \leq h \leq \chi_U$,

$$\int_\Omega |h - \chi_A|^p \, dx \leq \mathcal{L}^N(U \setminus K) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Nous allons à présent améliorer le résultat précédent en montrant que l'ensemble des fonctions régulières et à support compact est dense dans les espaces de Lebesgue. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles à tout ordre et telles que $\mathrm{Supp}(f)$ est un compact inclu dans Ω.

Définition 4.3.4. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\rho \geq 0$, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset \overline{B}(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\, dx = 1$ et $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n})$. On dit que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

A titre d'exemple, on peut vérifier que la fonction $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x) := c \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

où la constante $c := \left(\int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}\, dx \right)^{-1}$, satisfait les propriétés requises ci-dessus.

Définition 4.3.5. Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable (*i.e.* dans $L^1(K)$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, et on note $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$) on définit le produit de convolution

$$f * \rho_n(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)\,dy \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 4.3.6. Notons que l'intégrale est bien défnie car $y \mapsto \rho_n(x-y)$ s'annule en dehors de $\overline{B}(x, \frac{1}{n})$, elle est bornée sur cet ensemble et f est intégrable sur cet ensemble.

Lemme 4.3.7. *Si $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus*

— *si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f*\rho_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}(f*\rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f)+\overline{B}(0, \frac{1}{n})$ et $f*\rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$;*

— *si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $f*\rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On montre par convergence dominée que $f * \rho_n$ est continue sur $\mathbb{R}^N$. Montrons à présent qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < 1$, en notant $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on calcule

$$\frac{f * \rho_n(x+he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho_n(x+he_i-y) - \rho_n(x-y)}{h} f(y)\,dy.$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\rho_n(x+h-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y) \to \partial_{x_i}\rho_n(x-y)f(y)$ quand $h \to 0$ car ρ_n est différentiable sur $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, le Théorème des accroissements finis montre que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a $\left|\frac{\rho_n(x+he_i-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y)\right| \leq \max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n| \chi_{\overline{B}(x,2)}(y)|f(y)|$ car $\rho_n(x+y-he_i) = \rho_n(x-y) = 0$ si $|y-x| > 2$. Notons que $\partial_{x_i}\rho_n$ étant également $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ elle est bornée sur $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que $\max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n|\chi_{\overline{B}(x,2)}|f| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Le Théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f * \rho_n(x+he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i}\rho_n(x-y)f(y)\,dy,$$

ce qui montre que $f*\rho_n$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et $\partial_{x_i}(f*\rho_n) = f*(\partial_{x_i}\rho_n)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On montre de nouveau par convergence dominée que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur $\mathbb{R}^N$, ce qui établit que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$. Par récurrence, on montre ainsi que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$.

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B}(0,R)$. Comme f est continue sur le compact $\overline{B}(0,R)$ (et donc bornée) et nulle à l'extérieur de $\overline{B}(0,R)$, $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$. De plus si $x \notin \mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n)$ et $y \in \mathrm{Supp}(\rho_n)$, alors $x - y \notin \mathrm{Supp}(f)$ et donc $f(x-y) = 0$. Par conséquent,

$$f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)\,dy = \int_{\mathrm{Supp}(\rho_n)} f(x-y)\rho_n(y)\,dy = 0,$$

ce qui montre que le support de $f*\rho_n$ (qui est toujours un fermé) est inclu dans $\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n) = \mathrm{Supp}(f) + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$ et en particulier que $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tels que $\|x - x'\| \leq \delta$ implique

$|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand de sorte que $1/n \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour tout $y \in \overline{B}(0, \frac{1}{n})$, on a $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon$. On multiplie alors cette inégalité par $\rho_n(y) \geq 0$, puis on intègre sur $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \rho_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)\, dy \leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

où l'on a utilisé le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de δ donc ε) tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f * \rho_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $f * \rho_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ et donc dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si $1 \leq p < \infty$, comme $f(x) = f * \rho_n(x) = 0$ si $|x| > R + \frac{1}{n}$, on peut élever l'expression (4.3.1) à la puissance p, puis par intégration,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx = \int_{\overline{B}(0, R+\frac{1}{n})} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx \leq \varepsilon^p \mathcal{L}^N(\overline{B}(0, R+1)), \tag{4.3.2}$$

ce qui montre également que $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Supposons enfin que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq p < \infty$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\int_K |f(x)|\, dx \leq \|f\|_p \, \mathcal{L}^N(K)^{1-1/p} < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, et donc que le produit de convolution $f * \rho_n$ est bien défini. D'après le Théorème 4.3.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Par ailleurs, d'après (4.3.2), on a $\|g - g * \rho_n\|_p \leq \varepsilon$ pour n assez grand. Par conséquent,

$$\|f - f * \rho_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g * \rho_n\|_p + \|(g - f) * \rho_n\|_p \leq 2\varepsilon + \|(g - f) * \rho_n\|_p.$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder et le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1$,

$$\begin{aligned} |(g - f) * \rho_n(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy \right|^p \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)^{1/p}\rho_n(y)^{1/p'}\, dy \right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y) - f(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy, \end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport à x et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient que

$$\|(g - f) * \rho_n\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y) - f(x-y)|^p\, dx \right) \rho_n(y)\, dy = \|g - f\|_p^p.$$

Par conséquent, $\|f - f * \rho_n\|_p \leq 3\varepsilon$, ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

Corollaire 4.3.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le Théorème 4.3.3, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f-g\|_p \leq \varepsilon$. On étend g par zéro en dehors de Ω et on note $\tilde{g}$ cette extension. Alors $\tilde{g} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et $\operatorname{Supp}(\tilde{g}) \subset \Omega$. D'après le Lemme 4.3.7, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$, $\operatorname{Supp}(\tilde{g}*\rho_n) \subset \operatorname{Supp}(\tilde{g})+\overline{B}(0,\frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\|\tilde{g}*\rho_n - \tilde{g}\|_p \leq \varepsilon$. Finalement, on obtient que $f_n := \tilde{g}*\rho_n|_\Omega \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et

$$\|f-f_n\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-\tilde{g}*\rho_n\|_p \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

4.4 Séparabilité

Nous somme à présent en mesure de discuter la séparabilité des espaces de Lebesgue.

Proposition 4.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compact, *i.e.*, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. D'après le Corollaire 2.2.5, $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable par rapport à la norme uniforme sur K_n. Or les ensembles K_n étant bornés, la convergence uniforme sur K_n implique la convergence dans $L^p(K_n)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ car

$$\int_{K_n} |f-g|^p\,dx \leq \mathcal{L}^N(K_n) \sup_{K_n} |f-g|^p \quad \text{pour tout } f,g \in \mathcal{C}(K_n).$$

Par conséquent, l'espace $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable pour la convergence dans $L^p(K_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un ensemble D_n dénombrable dense dans $\mathcal{C}(K_n)$ pour la convergence dans $L^p(K_n)$.

Posons $D := \bigcup_n D_n$ qui est par conséquent dénombrable. Si l'on énumère les éléments de D en une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, chacune des fonctions f_i est une fonction continue sur un sous-ensemble compact de Ω. On étend alors f_i par zéro sur Ω, et on note $\tilde{f}_i$ cette extension qui n'est *a priori* plus continue mais toutefois dans $L^p(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} := \{\tilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est alors un sous-ensemble dénombrable de $L^p(\Omega)$. Montrons qu'il est dense dans $L^p(\Omega)$. Pour ce faire, soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 4.3.3, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f-g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Ensuite il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Supp}(g) \subset K_n$. Donc il existe un $h \in D_n$ tel que $\|g-h\|_{L^p(K_n)} \leq \varepsilon$. Soit $\tilde{h}$ l'extension par zéro de h sur Ω. Alors $\tilde{h} \in \tilde{D}$ et comme $g = 0$ sur $\Omega \setminus K_n$, il vient

$$\int_\Omega |\tilde{h}-g|^p\,dx = \int_{K_n} |h-g|^p\,dx \leq \varepsilon^p.$$

Finalement, on a que $\|f-\tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f-g\|_{L^p(\Omega)} + \|g-\tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon$, ce qui montre la densité de $\tilde{D}$ dans $L^p(\Omega)$. □

Proposition 4.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Démonstration. Soit $X := \{\chi_{B(x,r)} : B(x,r) \subset \Omega\}$ qui est une famille non dénombrable de $L^\infty(\Omega)$. Si χ, $\chi' \in X$ sont telles que $\chi \neq \chi'$, alors $\|\chi - \chi'\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble $D = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^\infty(\Omega)$ dénombrable et dense. Soit $\Phi : X \to \mathbb{N}$ l'application qui à chaque $\chi \in X$ associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\chi - f_n\|_\infty \leq 1/3$. Cette application est bien définie par densité de D dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons maintenant que $\Phi(\chi_1) = \Phi(\chi_2) = n$, alors $\|\chi_1 - f_n\|_\infty \leq 1/3$ et $\|\chi_2 - f_n\|_\infty \leq 1/3$, ce qui implique par l'inégalité triangulaire que $\|\chi_1 - \chi_2\|_\infty \leq 2/3 < 1$. Comme χ_1 et $\chi_2 \in X$ sont des fonctions caractéristiques, alors nécessairement $\chi_1 = \chi_2$ dans $L^\infty(\Omega)$ ce qui montre l'injectivité de Φ. L'ensemble X étant non dénombrable, on aboutit à une contradition. □

4.5 Critère de compacité

Pour finir, nous établissons un critère compacité dans les espaces de Lebesgue.

Théorème 4.5.1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $1 \leq p < \infty$, telle que*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < +\infty$;

(ii) $\sup_{\|y\|\leq\delta} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x+y) - f_n(x)|^p \, dx \to 0$ *quand* $\delta \to 0$.

Alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, la suite $(f_{n|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^p(K)$.

Démonstration. Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante comme dans la Définition 4.3.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(K)$. Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K)$. Pour faire, nous allons appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. Tout d'abord d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in K$, on a

$$|f_n * \rho_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y)|\rho_k(y)\, dy \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_k,$$

où, d'après l'hypothèse (i), la constante $C_k > 0$ est indépendante de n et de x. Par ailleurs, si x et $x' \in K$,

$$\begin{aligned}
|f_n * \rho_k(x) - f_n * \rho_k(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x'-y)|\rho_k(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x - x' + z) - f_n(z)|\rho_k(x'-z)\, dz \\
&\leq \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \left(\sup_{\|y\|\leq\|x-x'\|} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(z+y) - f_n(z)|^p \, dz \right)^{1/p} \\
&= \omega_k(\|x - x'\|),
\end{aligned}$$

où, d'après l'hypothèse (ii), $\omega_k(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$, ce qui montre l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$. Le Théorème d'Ascoli-Arzela combiné avec un principe d'extraction diagonal assure l'existence d'une sous-suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{C}(K)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme K est borné on en déduit que $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(K)$.

Nous allons à présent montrer que la sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$ ce qui montrera qu'elle converge dans cet espace par le Théorème de Riesz-Fisher. Pour ce faire, on écrit grâce à l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} &\le \|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(n)} * \rho_k\|_{L^p(K)} \\ &\quad + \|f_{\sigma(n)} * \rho_k - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)} + \|f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)}. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Comme $\mathrm{Supp}(\rho_k) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{k})$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y)\, dy = 1$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)| \le \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|\rho_k(y)\, dy.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance p, en intégrant par rapport à $x \in K$ et en appliquant l'inégalité de Hölder et le Théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}\int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx &\le \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} \left(\int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|^p\, dx \right) \rho_k(y)\, dy \\ &\le \sup_{\|y\|\le 1/k} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_n(x) - f_n(x-y)|^p\, dx.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii), on en déduit alors que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx = 0.$$

Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0}(x)|\, dx \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

La suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans $L^p(K)$, elle y est de Cauchy et on peut trouver un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \ge N_0$,

$$\|f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0} - f_{\sigma(m)} * \rho_{k_0}\|_{L^p(K)} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc si m, $n \ge N_0$, (4.5.1) donne $\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} \le \varepsilon$, ce qui montre que $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est Cauchy dans $L^p(K)$, et donc qu'elle converge dans cet espace. □