Chapitre 5

Dualité dans les espaces de Lebesgue

5.1 Le cas Hilbertien de L^2

5.1.1 Quelques rappels sur les espaces de Hilbert

On rappelle qu'un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel H muni d'un *produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to [0, +\infty[$ qui est une

(i) *forme bilinéaire* : $u \mapsto \langle u, v \rangle$ est linéaire pour tout $v \in H$ et $v \mapsto \langle u, v \rangle$ est linéaire pour tout $u \in H$;

(ii) *symétrique* : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tout u, $v \in H$;

(iii) *définie positive* : $\langle u, u \rangle > 0$ pour tout $u \in H \setminus \{0\}$;

et qui est complet pour la norme Hilbertienne $\|u\|_H := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ associée au produit scalaire.

Les résultats suivants sont spécifiques aux espaces de Hilbert et y jouent un rôle fondamental.

Théorème 5.1.1 (Projection orthogonale). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et C un sous-ensemble de H convexe, fermé et non vide. Pour tout $u \in H$, il existe un unique élément $P_C(u) \in C$, appelé la projection orthogonale de u sur C, tel que*

$$\|u - P_C(u)\|_H = \min_{v \in C} \|u - v\|_H.$$

De plus, $P_C(u)$ est caractérisé par

$$P_C(u) \in C, \quad \langle u - P_C(u), v - P_C(u) \rangle \leq 0 \text{ pour tout } v \in C. \tag{5.1.1}$$

Démonstration. On considère le problème de minimisation

$$\alpha := \inf_{v \in C} \|u - v\|_H^2 \tag{5.1.2}$$

Comme $C \neq \emptyset$, on a $\alpha \in [0, +\infty[$. On considère alors une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de H telle que pour tout $n \geq 1$,

$$v_n \in C, \quad \alpha \leq \|v_n - u\|_H^2 \leq \alpha + \frac{1}{n}. \tag{5.1.3}$$

Par convexité de C, $(v_n + v_m)/2 \in C$ pour tout m, $n \geq 1$, et donc l'inégalité du parallélogramme montre que

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \left\| \frac{v_m + v_n}{2} - u \right\|_H^2 &= \left\| \frac{v_m - u}{2} + \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\
&= 2\left\| \frac{v_m - u}{2} \right\|_H^2 + 2\left\| \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 - \left\| \frac{v_m - u}{2} - \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|_H^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|v_m - v_n\|_H^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans H. Il existe donc un élément $v \in H$ tel que $v_n \to v$. L'ensemble C étant fermé, on en déduit que $v \in C$ et par passage à la limite dans (5.1.3) que $\alpha = \|v - u\|_H^2$. Ceci montre l'existence d'une solution au problème de minimisation (5.1.2). Quant à l'unicité, si $v_1 \in C$ et $v_2 \in C$ sont deux solutions, alors par convexité de C, on a $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in C$, d'où

$$\alpha \leq \left\| \frac{v_1 + v_2}{2} - u \right\|_H^2 = \frac{1}{2}\|v_1 - u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v_2 - u\|_H^2 - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2 = \alpha - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2,$$

ce qui montre que $\|v_1 - v_2\|_H = 0$ et donc que $v_1 = v_2$.

Montrons à présent que l'unique solution de (5.1.2) est caractérisée par (5.1.1). Si $P_C(u)$ est l'unique solution de (5.1.2), alors $P_C(u) \in C$ et, par convexité de C, $P_C(u) + t(v - P_C(u)) \in C$ pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $v \in C$. Donc

$$\alpha \leq \|u - P_C(u) - t(v - P_C(u))\|_H^2 = \alpha - 2t\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle + t^2\|v - P_C(u)\|_H^2.$$

En divisant par t puis en passant à la limite quand $t \to 0$, il vient $\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle \leq 0$ comme attendu. Réciproquement, supposons (5.1.1), alors pour tout $v \in C$,

$$\begin{aligned}
\|v - u\|_H^2 &= \|v - P_C(u) + P_C(u) - u\|_H^2 \\
&= \|v - P_C(u)\|_H^2 + 2\langle v - P_C(u), P_C(u) - u\rangle + \|P_C(u) - u\|_H^2 \geq \|P_C(u) - u\|_H^2,
\end{aligned}$$

ce qui montre, avec $P_C(u) \in C$, que $P_C(u)$ est la solution au problème de minimisation (5.1.2). □

Dans le cas particulier où C est un sous espace vectoriel fermé de H, le théorème de la projection orthogonale permet de décomposer l'espace H en la somme directe de C et de son orthogonal.

Proposition 5.1.2. *Soit F un sous espace vectoriel fermé de H et $u \in H$. Alors la projection orthogonale $P_F(u)$ de u sur F est caractérisée par*

$$P_F(u) \in F, \quad \langle u - P_F(u), v\rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F.$$

De plus, en notant $F^\perp = \{v \in H : \langle v, u\rangle = 0 \text{ pour tout } u \in F\}$ l'orthogonal de F, on a la décomposition

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration. Comme F est un sous espace vectoriel de H, il est non vide (car il contient l'origine) et convexe. La projection orthogonale $P_F(u)$ de u sur F est donc bien définie et est caractérisée par

$$P_F(u) \in F, \quad \langle u - P_F(u), w - P_F(u)\rangle \leq 0 \text{ pour tout } w \in F.$$

Si $v \in F$ est arbitraire, alors $w = P_F(u) \pm v \in F$ car F est un sous espace vectoriel, et donc $\pm\langle u - P_F(u), v\rangle \leq 0$, autrement dit $\langle u - P_F(u), v\rangle = 0$. L'implication réciproque est immédiate.

Tout élément $u \in H$ peut donc s'écrire $u = P_F(u) + (u - P_F(u))$, où $P_F(u) \in F$ et $u - P_F(u) \in F^\perp$ d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur F établie précédemment. Par ailleurs, comme $F^\perp \cap F = \{0\}$, alors on a bien que $H = F \oplus F^\perp$. □

Un corollaire du résultat précédent est l'identification du dual d'un espace de Hilbert H avec H lui même.

Théorème 5.1.3 (Riesz). *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $L \in H'$. Il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$L(u) = \langle f, u\rangle \qquad \text{pour tout } u \in H.$$

De plus, $\|L\|_{H'} = \|f\|_H$.

Démonstration. Si $L = 0$, on prend $f = 0$. Sinon, on pose $M = \mathrm{Ker}(L)$ qui est un sous espace vectoriel fermé de H. Comme d'après la Proposition 5.1.2, $H = M \oplus M^\perp$, on en déduit que $M^\perp \neq \{0\}$ et il existe donc un élement $e \in M^\perp$ avec $e \neq 0$. Alors $L(e) \neq 0$ (car sinon $e \in M$ et donc $e = 0$). On en déduit que $u - \frac{L(u)}{L(e)}e \in M$ donc $\langle u, e\rangle = \frac{L(u)}{L(e)}\|e\|_H^2$, soit $L(u) = \langle \frac{L(e)}{\|e\|_H^2}e, u\rangle$ pour tout $u \in H$, d'où l'existence. Quant à l'unicité, si f_1 et $f_2 \in H$ sont deux représentants de L, alors $\langle f_1 - f_2, u\rangle = 0$ pour tout $u \in H$, en particulier le choix de $u = f_1 - f_2$ donne $\|f_1 - f_2\|_H^2 = 0$ soit $f_1 = f_2$. Enfin en prenant $u = f/\|f\|_H$, on obtient $\|L\|_{H'} \geq \|f\|_H$, l'autre inégalité vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

5.1.2 Application à L^2

En tant qu'espace de Hilbert, le Théorème de Riesz (Théorème 5.1.3) permet d'identifier le dual de L^2 avec lui même.

Théorème 5.1.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $L \in [L^2(X)]'$, il existe un unique $f \in L^2(X)$ tel que pour tout $g \in L^2(X)$,*

$$L(g) = \int_X fg\, d\mu, \quad \|L\|_{[L^2(X)]'} = \|f\|_2.$$

5.2 Le cas L^p, $1 \leq p < \infty$

Le cas général est plus difficile. Il repose sur le théorème de Radon-Nikodým lui même conséquence du Théorème 5.1.4. Nous donnons ici une version loin d'être optimale, mais toutefois suffisante pour la suite.

Théorème 5.2.1 (Radon-Nikodým). *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et λ et ν deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que λ est absolument continue par rapport à ν : si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $\nu(A) = 0$, alors $\lambda(A) = 0$. Alors, il existe une unique fonction $f \in L^1(X, \nu)$ avec $f \geq 0$ ν-p.p. telle que*

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\nu \qquad \textit{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. **Etape 1 :** On suppose ici que $\lambda \leq \nu$. Soit $u : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable, d'après le Théorème 4.3.1 de densité des fonctions étagées, il existe une suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions positives étagées telles que $u_n \to u$ simplement dans X. Comme u_n est étagée, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, donc

$$\int_X u_n \, d\lambda \leq \int_X u_n \, d\nu,$$

puis, par convergence monotone, on obtient que

$$\int_X u \, d\lambda \leq \int_X u \, d\nu.$$

En prenant $u = |f|^2$ avec $f \in L^2(X, \nu)$, on obtient que

$$\int_X |f|^2 \, d\lambda \leq \int_X |f|^2 \, d\nu.$$

Ensuite, λ étant une mesure finie, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(X, \lambda)$ montre que

$$\int_X |f| \, d\lambda \leq \sqrt{\lambda(X)} \left(\int_X |f|^2 \, d\nu \right)^{1/2},$$

de sorte que $L^2(X, \nu) \subset L^1(X, \lambda)$. Ceci montre alors que l'application $\Phi : L^2(X, \nu) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(g) = \int_X g \, d\lambda,$$

est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur $L^2(X, \nu)$. Le Théorème 5.1.4 nous donne alors l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^2(X, \nu)$ telle que

$$\Phi(g) = \int_X fg \, d\nu = \int_X g \, d\lambda.$$

Comme la mesure ν est finie, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a que $\chi_A \in L^2(\mathbb{R}, \nu)$ et donc

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\nu,$$

ce qui est l'inégalité demandée. Montrons de plus que $f(x) \in [0,1]$ pour ν-presque tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \lambda(\{f \leq -1/n\}) = \int_{\{f \leq -1/n\}} f\,d\nu \leq -\frac{1}{n}\nu(\{f \leq -1/n\}) \leq 0,$$

ce qui montre que $\nu(\{f \leq -1/n\}) = \lambda(\{f \leq -1/n\}) = 0$. Comme $\{f < 0\} = \bigcup_n \{f \leq -1/n\}$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f < 0\}) = 0$. De même

$$\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) \geq \lambda(\{f \geq 1 + 1/n\}) = \int_{\{f \geq 1+1/n\}} f\,d\nu \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}),$$

ce qui montre que $\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) = 0$. Comme $\{f > 1\} = \bigcup_n(\{f \geq 1 + 1/n\})$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f > 1\}) = 0$.

Etape 2 : On suppose maintenant que λ est absolument continue par rapport à ν. Il s'ensuit que les mesures λ et $\nu + \lambda$ sont finies et $\lambda \leq \lambda + \nu$, de sorte qu'on peut appliquer la conclusion de l'étape 1. Il existe donc une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f \in L^1(X, \nu + \lambda)$ telle que $f(x) \in [0,1]$ pour $(\nu + \lambda)$-presque tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\lambda(A) = \int_A f\,d\nu + \int_A f\,d\lambda,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, soit

$$\int_A f\,d\nu = \int_A (1 - f)\,d\lambda. \tag{5.2.1}$$

Comme $\nu \leq \nu + \lambda$ et $\lambda \leq \nu + \lambda$, alors f prend ses valeurs dans $[0,1]$ ν-p.p. et λ-p.p. Par approximation (voir la Proposition 4.3.1) et convergence monotone, on obtient également que

$$\int_X fg\,d\nu = \int_X (1 - f)g\,d\lambda \tag{5.2.2}$$

pour toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable $g : X \to \mathbb{R}^+$. En notant $Z := \{f = 1\}$, on a d'après (5.2.1) que $\nu(Z) = 0$ et donc que $\lambda(Z) = 0$. Définissons alors $\bar{f} = \frac{f}{1-f}\chi_{Z^c}$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et positive, il vient donc en prenant $g = \frac{\chi_{A \setminus Z}}{1-f}$ dans (5.2.2)

$$\lambda(A) = \lambda(A \setminus Z) = \int_X (1 - f)\frac{\chi_{A \setminus Z}}{1 - f}\,d\lambda = \int_A \bar{f}\,d\nu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Le fait que $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R}, \nu)$ vient du fait que λ est une mesure finie. □

Nous aurons également besoin de décomposer n'importe quelle forme linéaire continue sur L^p comme la dfférence entre deux formes linéaires continues positives.

Lemme 5.2.2. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe des formes linéaires continue positives L^+ et L^- sur $L^p(X)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \textit{pour tout } f \in L^p(X).$$

Démonstration. Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in L^p(X) : \ f \geq 0 \ \mu\text{-p.p. sur } X\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}^+, \ g \leq f\}.$$

Etape 1 : *L^+ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$. Comme $0 \in \mathcal{C}^+$, $L^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq g \leq f$. Par continuité de L, on a $L(g) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g\|_p \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p$, et par passage au sup en g, on obtient que $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p < \infty$.

Etape 2 : *L^+ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. On décompose g comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \leq f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au sup en g,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité on se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de L^+, il existe g_1 et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq g_i \leq f_i$ et $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résulltat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Etape 3 : *Définition et additivité de L^+ sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. On décompose f comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si f et $g \in L^p(X)$, alors $(f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f + g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f + g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f + g) = L^+(f) + L^+(g)$.

Etape 4 : *L^+ est continue sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. Comme L^+ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant f_1 et $f_2 \in L^p(X)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f_1 - f_2\|_p.$$

Etape 5 : *L^+ est une forme linéaire sur $L^p(X)$.* L'additivité de L^+ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $(-f)^\pm = f^\mp$, alors $L^+(-f) = -L^+(f)$ et l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $L^+(qrf) = qL^+(rf) = L^+(pf) = pL^+(f)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de L^+ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impliquent que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etape 6 : *L^- est une forme linéaire continue positive sur $L^p(X)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors L^- est clairement une forme linéaire continue sur $L^p(X)$. De plus, par définition de L^+, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que L^- est également positive. □

Venons en maintenant à la caractérisation du dual de L^p.

Théorème 5.2.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, i.e., il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que*

$$\mu(E_n) < +\infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Soit $1 \leq p < \infty$ et p' l'exposant conjugué donné par $1/p+1/p' = 1$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(X)$ telle que

$$L(g) = \int_X f g \, d\mu \qquad \text{pour tout } g \in L^p(X)$$

et

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} = \|f\|_{L^{p'}(X)}.$$

Par conséquent, le dual de $L^p(X)$ est isométriquement isomorphe à $L^{p'}(X)$.

Avant de procéder à la preuve du Théorème 5.2.3, remarquons que celui-ci s'applique à la mesure de Lebesgue qui est σ-finie puisque $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n\geq 1} B(0,n)$ et, $\mathcal{L}^N$ étant finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N(B(0,n)) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. Posons $F_0 = E_0$ et pour tout $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ de sorte que $\mu(F_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et les F_n sont deux à deux disjoints.

Etape 1 : Supposons tout d'abord que L et une forme linéaire continue positive. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\nu_n(A) = \mu(A \cap F_n), \quad \lambda_n(A) := L(\chi_{A\cap F_n}).$$

Alors ν_n est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$. Quant à λ_n, on a clairement que $\lambda_n(\emptyset) = L(0) = 0$. Par ailleurs, si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \lim_{k\to+\infty} \chi_{\bigcup_{j=0}^k A_j} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^k \chi_{A_j} \quad \text{dans } X$$

et

$$0 \leq \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n} - \sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n} = \chi_{\bigcup_{j>k} A_j\cap F_n} \leq \chi_{F_n} \in L^p(X).$$

Le Théorème de la convergence dominée montre alors que $\sum_{j=0}^{k} \chi_{A_j \cap F_n} \to \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \cap F_n}$ dans $L^p(X)$. Donc, par continuité et linéarité de L,

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = L\left(\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n}\right)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} L\left(\sum_{j=0}^{k} \chi_{A_j\cap F_n}\right) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} L\left(\chi_{A_j\cap F_n}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n(A_j),$$

ce qui montre que λ_n est également une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. De plus comme

$$\lambda_n(A) = L(\chi_{A\cap F_n}) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'} \mu(A\cap F_n)^{1/p} = \|L\|_{[L^p(X)]'} \nu_n(A)^{1/p}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, on constate d'une part que λ_n est absolument continue par rapport à ν_n, et d'autre part que λ_n est une mesure finie. Le Théorème de Radon-Nikodým montre alors l'existence d'une fonction $f_n \in L^1(X, \nu_n)$ telle que $f_n \geq 0$ ν_n-p.p. et

$$\lambda_n(A) = \int_A f_n \, d\nu_n = \int_{A\cap F_n} f_n \, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Par linéarité de L, on en déduit que si g est une fonction étagée positive,

$$L(g\chi_{F_n}) = \int_{F_n} f_n g \, d\mu,$$

puis par approximation (voir la Proposition 4.3.1) et convergence monotone, l'égalité précédente s'étend à toute fonction positive $g \in L^p(X)$. En posant $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \chi_{F_n}$, une nouvelle application du Théorème de la convergence dominée montre que $\sum_{n=0}^{k} g\chi_{F_n} \to g$ dans $L^p(X)$, et donc par linéarité et continuité de L et convergence monotone,

$$L(g) = L\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g\chi_{F_n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{F_n} f_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

Montrons enfin que $g \in L^{p'}(X)$. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A\cap E_k} f \, d\mu \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} \mu(A\cap E_k).$$

En choisissant $A = \{f \geq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A\cap E_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mu(A) = 0$ en faisant tendre $k \to +\infty$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'}$. Si en revanche $1 < p < \infty$, on pose $g_{n,k} = f^{p'-1}\chi_{\{f\leq n\}\cap E_k}$. Vérifions que $g_{n,k} \in L^p(X)$:

$$\int_X |g_{n,k}|^p \, d\mu = \int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu \leq n^{p'} \mu(E_k) < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{p'}\,d\mu = L(g_{n,k}) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g_{n,k}\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'}\left(\int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p},$$

ce qui implique que

$$\left(\int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ puis $k \to +\infty$ et par application du Théorème de la convergence monotone, il vient

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'},$$

ce qui montre bien que $f \in L^{p'}(X)$.

On a donc montré l'existence d'une fonction positive $f \in L^{p'}(X)$ telle que

$$L(g) = \int_X fg\,d\mu \quad \text{pour toute fonction } g \in L^p(X),\ g \geq 0.$$

Si $g \in L^p(X)$ est de signe quelconque, l'égalité précédente reste vraie en décomposant g comme la différence entre sa partie positive et négative, et en utilisant la linéarité de L.

Etape 2 : D'après le Lemme 5.2.2, on peut écrire que $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues et positives sur $L^p(X)$. En appliquant l'étape 1, on obtient des fonctions $f^\pm \in L^{p'}(X)$ telles que

$$L^\pm(g) = \int_X f^\pm g\,d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

On pose $f := f^+ - f^- \in L^{p'}(X)$ de sorte que

$$L(g) = L^+(g) - L^-(g) = \int_X f^+g\,d\mu - \int_X f^-g\,d\mu = \int_X fg\,d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Par l'inégalité de Hölder, on a que

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} \leq \|f\|_{p'}.$$

Pour montrer l'inégalité opposée, on procède de même que dans l'étape 1. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, on choisit $g := \frac{f}{|f|}\chi_{A\cap\{f\neq 0\}\cap E_n} \in L^1(X)$ de sorte que

$$\int_{A\cap E_n} |f|\,d\mu = \int_X fg\,d\mu = L(g) \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\|g\|_1 \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\mu(A\cap E_n).$$

En choisissant $A = \{|f| \geq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A\cap E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $\mu(A) = 0$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et

$$\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'}.$$

Si $1 < p < \infty$, on prend $g = f|f|^{p'-2}\chi_{\{f\neq 0\}}$. Notons que $g \in L^p(X)$ car

$$\int_X |g|^p \, d\mu = \int_X |f|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_X |f|^{p'} \, d\mu < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_X |f|^{p'} \, d\mu = L(g) \le \|L\|_{[L^p(X)]'} \|g\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'} \left(\int_X |f|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p}$$

ce qui implique que

$$\|f\|_{p'} \le \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Quant à l'unicité, si f_1 et $f_2 \in L^{p'}(X)$ satisfont

$$L(g) = \int_X f_1 g \, d\mu = \int_X f_2 g \, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X),$$

alors on a

$$\int_X (f_1 - f_2) g \, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Le choix $g = \frac{f_1 - f_2}{|f_1 - f_2|} \chi_{\{f_1 \neq f_2\} \cap E_n} \in L^1(X)$ pour $p = 1$ montre que

$$\int_{E_n} |f_1 - f_2| \, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

puis par passage à la limite quand $n \to +\infty$ par convergence monotone, $\|f_1 - f_2\|_1 = 0$, soit $f_1 = f_2$ μ-presque partout. Si $1 < p < \infty$, alors on pose $g = (f_1 - f_2)|(f_1 - f_2|^{p'-2} \chi_{\{f_1 \neq f_2\}} \in L^p(X)$ et on obtient $\|f_1 - f_2\|_p = 0$ d'où $f_1 = f_2$ μ-presque partout. □

Remarque 5.2.4. Le Théorème 5.2.3 ne couvre pas le cas $p = \infty$. En particulier, $L^1(X)$ est un sous-espace strict du dual de $L^\infty(X)$. On peut montrer (et ça n'est pas forcément très difficile !) que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, n'importe quel élément $L \in [L^\infty(X)]'$ dans le dual de $L^\infty(X)$ s'identifie avec un unique élément de l'espace $\mathrm{ba}(X, \mathcal{A}, \mu)$ qui sont les applications **b**ornées et **a**dditives d'ensembles $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

— $\lambda(\emptyset) = 0$;
— $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ pour tout A, $B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$;
— la quantité

$$|\lambda|(X) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda(A_i)| : \{A_i\}_{1 \le i \le m} \subset \mathcal{A} \text{ partition finie de } X \right\}$$

est finie ;
— $\lambda(A) = 0$ si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$;

via la dualité [1]

$$L(f) = \int_X f \, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in L^\infty(X).$$

1. Sous réserve que l'intégrale par rapport à une telle "mesure finiment additive" soit correctement définie